DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (1,5 points)

Calculer la somme suivante : $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2}{k+2})$

Exercice 2. (6.5 points)

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

1. $\frac{X^3+X+1}{(X-1)(X-2)}$ est elle une fraction irréductible ? La décomposer dans $\mathbb{R}(X)$.
2. $\frac{2X+5}{(X+1)^3(X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$
3. $\frac{1}{(X^2+9)(X^2+2X+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$ puis déterminer une primitive de la fraction rationnelle
4. $\frac{X^2+1}{(X+1)^4}$dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 3. (1.5 points)

Soit E et E' un espace vectoriel et f est une application linéaire de E dans E'
Démontrer que $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 4. (4 points)

Soit f l'application définie par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto 2P' \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer Ker f. Quelle est sa dimension ?
3. Calculer la rang de f.
4. Déterminer Imf
5. f est elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5. (6,5 points)

Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans E', les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses, toute réponse devra être justifiée.

1. Si (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E alors $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de E'.
2. $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

3. Il est possible d'avoir f injective et $dim(E) > dim(E')$.
4. L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$ est un automorphisme.
5. Si p et q sont des projecteurs de E à savoir $p \circ p = p \quad q \circ q = q$ tels que $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur.
6. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$ alors l'application $\phi : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto Q = P(X^2) \end{cases}$ est un endomorphisme.
7. L'application $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y+1 \end{cases}$ est une forme linéaire.