Exo 1 :

$\bullet I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \, dx$

$u' = x^2 \qquad u = \frac{1}{3}x^3$

$v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

$\bullet I_2 = \int_1^2 \frac{1}{3 + e^{-x}} dx$ en posant $u = e^x$

$x : 1 \longrightarrow u = e$

$x : 2 \longrightarrow u = e^2$

$du = e^x dx \qquad dx = \frac{du}{u}$

$\frac{1}{3+e^{-x}} dx = \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \frac{1}{3u+1} du$

$I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{3u+1} du = \frac{1}{3}\left[\ln|3u+1|\right]_e^{e^2} = \frac{1}{3}\ln(3e^2+1) - \frac{1}{3}\ln(3e+1)$

$\bullet I_3 = \int \frac{3e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt = 6\sqrt{e^t+1} + K \in \mathbb{R}$

$\bullet I_4 = \int \ln(1+t^2) dt$

$u' = 1 \qquad u = t$

$v = \ln(1+t^2) \qquad v' = \frac{2t}{1+t^2}$

$= t\ln(1+t^2) - 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$= t\ln(1+t^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$

$= t \ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t + k \in \mathbb{R}$

$$I_5 = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad x = y^2$$

$$dx = 2y\,dy$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{1+y} \cdot 2y\,dy$$

$$I_5 = \int \frac{2y}{1+y}\,dy$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= 2y - 2\ln|1+y| + k \in \mathbb{R}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + K.$$

Exercice 2 :

$$\int \frac{3-\sin x}{\frac{1}{2}\cos x + 3\tan x}\,dx$$

$$w(x) = \frac{3-\sin x}{\frac{1}{2}\cos x + 3\tan x}\,dx$$

$$w(-x) = \frac{3+\sin x}{+\frac{1}{2}\cos x - 3\tan x}(-dx) \neq w(x)$$

$$w(\pi - x) = \frac{3-\sin x}{-\frac{1}{2}\cos x - 3\tan x}(-dx) = w(x)$$

on pose $u = \sin x$ $\qquad du = \cos x\,dx$

$$\frac{3-\sin x}{\frac{1}{2}\cos x + 3\tan x}\,dx = \frac{(3-\sin x)\cos x\,dx}{\frac{1}{2}\cos^2 x + 3\sin x} = \frac{3-v}{\frac{1}{2}(1-v^2)+3v}\,dv$$

$$= \frac{3-v}{\frac{1}{2} - \frac{v^2}{2} + 3v}\,dv$$

$$I = \int \frac{3-v}{\frac{1}{2} - \frac{v^2}{2} + 3v}\,dv = \ln\left|\frac{1}{2} - \frac{v^2}{2} + 3v\right| + K$$

$$= \ln\left|\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 x}{2} + 3\sin x\right| + K$$

Exercice 3 :

. Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$

$$s_{[a;b]} = \sum_{\sigma} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

et $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} (f) \geq 0$

ainsi $\forall \sigma$ $s_{[a;b]}(f) \geq 0$ et par passage à la limite $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

. Si $g \geq f$ sur $[a;b]$ $g - f \geq 0$.

d'après la propriété précédente $\int_a^b (g-f) \geq 0$

et par linéarité de l'intégrale $\int_a^b g - \int f \geq 0$

$$\int_a^b g \geq \int_a^b f.$$

Exercice 6 :

1) La ligne de niveau est dans le plan passant par $\Pi(2,0)$ et parallèle à (yOz). Dans ce plan, la ligne de niveau a pour équation $z = 2^2 y$ soit $z = 4y$. La ligne de niveau est une droite.

2) Dans le plan $\parallel$ à (yOz), équation dans ce plan : $z = -x^2$, la ligne de niveau est 1 parabole.

3) On reconnait des paraboles dans les plans $\parallel$ au plan (ABC), donc $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{z}$ colinéaire à $\overrightarrow{AD}$.

On reconnait des droites dans les plan $\parallel$ à (BCF) donc $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{BF}$.

Comme $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]$, alors $AB = 2$ et $BF = 2$

Au sommet A, $|x| = |y| = 1$ donc $|z_A| = 1$

Au sommet G, $|x| = |y| = 1$ donc $|z_G| = 1$

z_A et z_G sont de signes opposés $\Rightarrow FG = 2$, on a donc O au centre du cube.

Choisissons $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow z_A = -1$

$= x_A^2 \times y_A \Rightarrow y_A = -1$

Donc $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. La surface étant symétrique par rapport au plan passant par O et $\parallel$ à (BFC) on peut choisir $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{i} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

1) $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \times y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} = \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f = 1 \times 0 = 0$$

2) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x+y \geq 0 \text{ et } y \neq 0\}$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\sqrt{r\cos\theta + r\sin\theta}\cos\theta}{r\sin\theta} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}\,\frac{\sqrt{\cos\theta+\sin\theta}\cos\theta}{\sin\theta}$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r}\times\sqrt{1}\times 0}{1} = 0$

Si $y = x^2$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Nous avons trouvé 2 chemins qui n'ont pas la même limite, donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exo 5

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0$ et $0 \leq \left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|x+y|}_{\to 0 \text{ en } (0,0)} \Rightarrow$ th. des gendarmes $\lim_{(0,0)} f = 0 = f(0,0)$

donc f est continue en $(0,0)$

2) Si $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\frac{1}{x^2+y^2} + (x+y)\times\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \times - \sin\frac{1}{x^2+y^2}$

$$= \cos\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\frac{1}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \cos\frac{1}{t^2}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. N'a pas de limite.

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.