DS 1 M22

28/04/25

Exercice 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) - 2\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \underline{2 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}}$$

Exercice 2.

1. FAUX $\frac{X^3+X+1}{(X-1)(X-2)}$ est irréductible si le numérateur n'a pas de facteur commun avec $(X-1)(X-2)$, c'est à dire 1 et 2 ne sont pas Racines.

   Or $P(1) = 3 \neq 0$ et $P(2) = 8+2+1 \neq 0$:

   Est bien irréductible

   De plus, on a $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$ et

$$X^3 + X + 1 = X(X^2 - 3X + 2) + 3X^2 - X + 1$$
$$= X(X^2 - 3X + 2) + 3(X^2 - 3X + 2) + 8X - 5$$

donc $F(X) = X + 3 + \frac{8X - 5}{(X-1)(X-2)}$

Or $R(X) = \frac{8X-5}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$

(2)

En 1 :
$(x-1)R(x)\big|_{x=1} = a = \frac{8-5}{1} = \underline{-3}$

En 2 :
$(x-2)R(x)\big|_{x=2} = b = \frac{11}{1} = \underline{11}$

Donc $R(x) = \frac{-3}{x-1} + \frac{11}{x-2}$

donc $\boxed{F(x) = x+3 - \frac{3}{x-1} + \frac{11}{x-2}}$

2). $F(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{x+2}$

(-1 et -2 pas racines du numérateur)

On a :

En -1 :
$(x+1)^3 F(x)\big|_{x=-1} = c = \frac{-2+5}{1} = \underline{3}$

En -2 :
$(x+2)F(x)\big|_{x=-2} = d = \frac{-4+5}{(-1)^3} = \underline{-1}$

En $+\infty$:
$xF(x)\big|_{x\to+\infty} = a+d = 0$ donc $a = -d = \underline{1}$

Enfin, en 0 : (par exemple)
$F(0) = \frac{5}{2} = a+b+c+\frac{d}{2}$

Donc $b = \frac{5}{2} - \frac{d}{2} - a - c = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -1$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} - \frac{1}{x+2}}$

(3)

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+9)(X^2+2X+1)} = \frac{1}{(X+1)^2(X^2+9)}$$

$$= \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+9}$$

En -1 :

$$(X+1)^2 F(X)\big|_{X=-1} = b = \frac{1}{10}$$

En $+\infty$:

$$XF(X)\big|_{X\to+\infty} = a + c = 0 \qquad (*)$$

En $3i$:

$$(X^2+9)F(X)\big|_{X=3i} = (3i)c + d = \frac{1}{(1+3i)^2} = \frac{1}{1+6i-9} = \frac{1}{-8+6i}$$

$$= \frac{-8-6i}{8^2+6^2} = -\frac{8}{100} - \frac{6}{100}i$$

Donc $d = \frac{-8}{100} = -\frac{2}{25}$ et $3ic = -\frac{6}{100}i$ donc $c = -\frac{2}{100} = -\frac{1}{50}$

Donc et $(*)$ donne $a = \frac{1}{50}$

Donc $F(X) = \dfrac{1/50}{X+1} + \dfrac{1/10}{(X+1)^2} + \dfrac{-\frac{1}{50}X - \frac{2}{25}}{X^2+9}$

Une primitive de F est donc

$$G(X) = \frac{1}{50}\ln|X+1| - \frac{1}{10}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{100}\ln(X^2+9) - \frac{2}{75}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{X^2+9} = \frac{1}{9}\frac{1}{\left(\frac{X}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\frac{1/3}{\left(\frac{X}{3}\right)^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)'$$

④ $F(X) = \frac{X^2+1}{(X+1)^4}$ n'a qu'un seul pôle : on fait apparaître $(X+1)$ au numérateur :

$$X^2+1 = (X+1)^2 - 2X = (X+1)^2 - 2(X+1) + 2$$

Donc $F(X) = \frac{X^2+1}{(X+1)^4} = \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{(X+1)^3} + \frac{2}{(X+1)^4}$

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$

• Montrons que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel

× $0_E \in \ker f$? On a $f(0_E) = 0_{E'}$ par linéarité donc $0_E \in \ker f$.

× Pour $u, v \in \ker f$, $\lambda \in \mathbb{K}$: $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ par linéarité
$= \lambda 0_{E'} + 0_{E'}$ par hypothèse
$= 0_{E'}$

Donc $\lambda u + v \in \ker f$: $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \to 2P' \end{cases}$$

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$f(\lambda P + Q) = 2(\lambda P + Q)' = \lambda 2P' + 2Q' = \lambda f(P) + f(Q)$: f est linéaire.

2. $P \in \ker f$ si $f(P) = 2P' = 0$, donc P est un polynôme constant.

Donc $\ker f = \{P = c \; ; \; c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)$

$\ker f$ est de dimension 1.

5)

3. On a $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

donc $3 = 1 + \operatorname{rg}(f)$: $\underline{\operatorname{rg}(f) = 2}$.

4. $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1, X, X^2)$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1); f(X); f(X^2))$

$f(1) = 0$; $f(X) = 2$; $f(X^2) = 4X$

Donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(2; 4X) = \operatorname{Vect}(1, X)}$

5. f n'est pas injective car $\ker f \neq \{0_E\}$, elle n'est ni surjective car $\operatorname{Im} f \neq E$ et n'est pas bijective.

<u>Exercice 5:</u> $f \in \mathcal{L}(E, E')$; E, E' de dimension finie

1. Si (e_1, e_2, e_3) génératrice de E alors $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ engendre E'

<u>FAUX:</u> $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

f $(x,y,z) \longrightarrow (x, y, z, x+y+z)$

$e_1 = (1,0,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

$e_2 = (0,1,0)$

$f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ne peut pas être une génératrice de $\mathbb{R}^4$ car composée de 3 vecteurs.

2. $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace de E:

<u>FAUX:</u> $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de E', pas de E

(faux dès que $E \neq E'$)

3. Il est possible que f injective et $\dim E > \dim(E')$

<u>FAUX:</u> Si f injective $\dim E = 0 + \dim \operatorname{Im} f \leq \dim E'$.

(6)

4. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (x+y, x-y) \end{cases}$ est un automorphisme.

Vrai : $g(\lambda(x,y)+(x',y')) = (\lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda x + x' - \lambda y - y')$

$= \lambda(x+y, x-y) + (x'+y', x'-y') = \lambda g(x,y) + g(x',y')$

g linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: endomorphisme

De plus : $(x,y) \in \operatorname{Ker} g \iff (x+y, x-y) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ -2y=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$: g injective donc bijective car $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

g est un automorphisme.

5. Si $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$, alors $p \circ q$ est un projecteur :

$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q \overset{q \circ p = p \circ q}{=} (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q$

($p \circ p = p$, $q \circ q = q$)

Vrai.

6. $E = \mathbb{R}[X]$. $\phi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ P \longrightarrow Q = P(X^2) \end{cases}$ est un endomorphisme.

Pour P_1 et $P_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\phi(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(X^2) = \lambda P_1(X^2) + P_2(X^2) = \lambda \phi(P_1) + \phi(P_2)$

Donc ϕ est un endomorphisme de E Vrai

7. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow x+y+1 \end{cases}$ est une forme linéaire : faux

$h(0,0) = 1 \neq 0_{\mathbb{R}}$ donc h n'est pas linéaire.