Corrigé DS2 M22 23-24

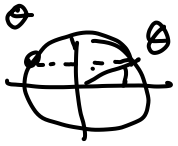
I) Ex 1

1 $z = (3+3\sqrt{3}i)^{10}$. Posons $z_0 = 3+3\sqrt{3}i$

- Module : On a $|z_0|^2 = 9+9,3 = 36$, donc $|z_0| = 6$
- Argument : $\frac{z_0}{|z_0|} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ · $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{3}$ [2π]

Donc $z_0 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $z = z_0^{10} = 6^{10} \cdot e^{i\frac{20\pi}{3}} = \underline{6^{10} e^{\frac{2i\pi}{3}}}$

2. $z = \frac{1}{-\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{1} = e^{i(\pi-\theta)}$



Donc $\underline{|z| = 1 \text{ et } \arg(z) = \pi - \theta}$

3. $z = \frac{-j}{LR\omega}$; $R, L, \omega > 0$.

On a $|z| = \sqrt{0 + \left(\frac{1}{LR\omega}\right)^2} = \underline{\frac{1}{LR\omega}}$ et $z = -j|z|$, donc $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$\arg(z) = \underline{-\frac{\pi}{2}}$

II) Exercice 2

1. $z^2 + z + 1 = 0$

On a $z^2 + z + 1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \left(z+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc les solutions sont $z = \underline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\underline{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(Alternativement, $\Delta = 1-4 = -3$, donc $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.)

2. a) $z^3 = 1+i$

On a $|1+i| = \sqrt{2}$, et $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc on cherche z tel que $z^3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On a donc $|z|^3 = \sqrt{2}$, i.e. $|z| = 2^{1/6}$

et $\arg(z) = \theta$ vérifie $3\theta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{12} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$

Donc $z \in \left\{ 2^{1/6} e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\} \right\}$

b) On cherche $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 1+i$, donc $Z = \frac{z-1}{z+1}$ est solution de $z^3 = 1+i$, donc Z appartient à l'ensemble trouvé en 3a)

Donc $\frac{z-1}{z+1} = z_i$ avec z_i l'une des 3 solutions de 3 a)

i.e $z-1 = z_i(z+i) \iff z(1-z_i) = 1 + i.z_i$

$\iff z = \frac{1+i.z_i}{1-z_i}$ avec z_i l'une des 3 solutions de 3a)

III) Exercice 3

On a $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Donc $\cos x (\sin(x))^3 = \frac{1}{2.(2i)^3} (e^{ix}+e^{-ix})(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})$

$= \frac{1}{2.(2i)^3} \left(e^{4ix} + e^{2ix}(-3+1) + 1(-3+3) + e^{-2ix}(3-1) - e^{-4ix} \right)$

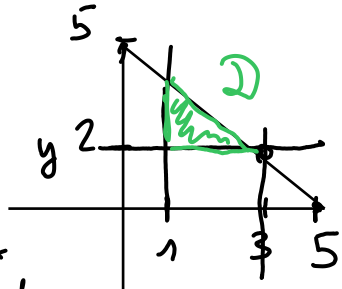
$= \frac{1}{2.(2i)^2} \left(\sin(4x) - 2\sin(2x) \right) = -\frac{1}{8} (\sin(4x) - 2\sin(2x))$

De là, une primitive de $\cos x \sin^3 x$ est

$\int^x -\frac{1}{8}(\sin(4x) - 2\sin(2x))dx = \left[\frac{\cos(4x)}{32} - \frac{\cos(2x)}{8} \right]^x$

IV) Exercice 4

$I = \iint \frac{1}{(x+y)^3}\,dx\,dy$ sur $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 1\le x\le 3 \ ;\ y\ge 2 \ ;\ x+y\le 5\}$



$(3,2)\in D$

On a $I = \int_1^3 \int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \int_1^3 \left[\frac{(x+y)^{-2}}{-2}\right]_2^{5-x} dx$

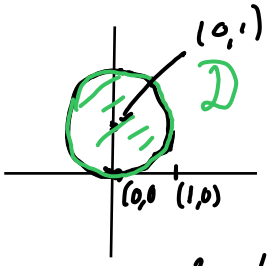
$(1,4)\in D$

$= \int_1^3 \frac{5^{-2}}{-2} - \frac{(2+x)^{-2}}{-2}\,dx = \int_1^3 -\frac{1}{50} + \frac{1}{2}(2+x)^{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{25} + \frac{1}{2}\left[-(2+x)^{-1}\right]_1^3 = -\frac{1}{25} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$

$= -\frac{1}{25} + \frac{1}{15} = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75}$ (>0)

V) Exercice 5



$D = \{x^2+y^2-2 \le 0\}$

$(x,y)\in D \iff x^2+y^2-2y \le 0 \iff x^2+(y-1)^2-1 \le 0$

$\iff x^2+(y-1)^2 \le 1$

Disque de Rayon 1 centré en $(0,1)$

$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Calculs $J(r,\theta)$: $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta + 1 \end{cases}$

donc $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

et $(x,y) \in D \iff \begin{matrix} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{matrix}$

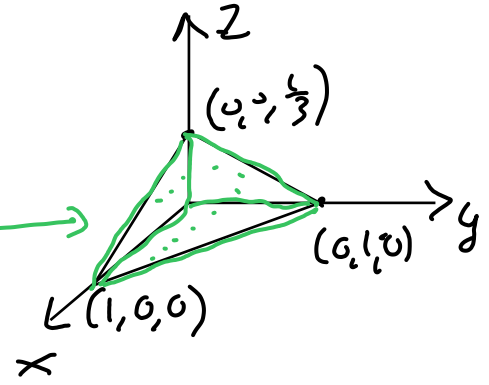
Donc $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, 1+r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$

VI) Exercice 6

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x+y+3z \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

1. $x+y+3z=1$ est le plan passant par les points $(1,0,0)$; $(0,1,0)$ et $(0,0,\frac{1}{3})$:

Le volume D →



2. $V = \iiint_D 1 \, dx dy dz$

Ona $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\frac{1}{3}(1-x-y)} 1 \cdot dz dy dx$

(car $y, z \geq 0$)

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3}(1-x-y) \, dy dx$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \right]_0^{1-x} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{3} \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx$

$= \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\frac{1}{18}}$

III) Exercice 7

$\omega = (y^3 - 6xy^2) dx + (3xy^2 - 6x^2 y) dy$

1. $\Omega = \mathbb{R}^2$, donc vérifions si $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Ona $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 12xy$: donc ω est exacte

et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - 12xy$

2 Cherchons u tel que

$\omega = du$. (existe car ω exacte)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 - 6xy^2 \iff u(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2 + C(y)$$

et $$\frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y \iff u(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2 + C(y)$$

Donc il suffit de prendre $\underline{u(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2}$.

A.I.S. $$\int_{\Gamma_{A\to B}} \omega = u(B) - u(A) = u(1,2) - u(0,1)$$
$$= 8 - 12 - 0 = -4$$

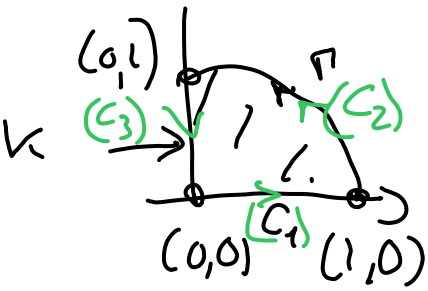
Donc $$\boxed{\int_{\Gamma_{A\to D}} \omega = -4}$$

VIII.) Exercice 8

$K = \{(x,y) ; x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$, Γ son bord

$\omega = xy^2\,dx + 2xy\,dy$

1.



Découpons Γ en 3 parties C_1, C_2, C_3 :

$$\oint_\Gamma \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega \quad \text{avec}$$

C_1 : $\gamma_1(x) = (x, 0)$ pour $x : 0 \to 1$

C_2 : $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t : 0 \to \frac{\pi}{2}$

C_3 : $\gamma_3(y) = (0, y)$ pour $y : 1 \to 0$

Donc $\int_{C_1} \omega = \int_0^1 0 \, dx + 0 \, dx = 0$

(car $y = 0$ sur C_1)

$$\int_{C_2} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t^2 (-\sin t) + 2 \cos t \sin t (\cos t) \, dt$$

$dx = -\sin t \, dt$

$dy = \cos t \, dt$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin t)^3 (\cos t \, dt)}_{u^3 u'} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2(\cos t)^2 \cdot \sin t \, dt}_{2v^2 v'}$$

$$= -\left[\frac{(\sin t)^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{-2(\cos t)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3} - 0 \right)$$

$$= \frac{5}{12}$$

et $\int_{C_3} \omega = \int_1^0 0\,dy + 0\,dy = 0$

(car x est nul le long de C_3)

Donc $\oint_\Gamma \omega = \frac{5}{12}$

2. En appliquant le théorème de Green Riemann

On a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 2xy$

Donc $I = \oint_\Gamma \omega = \iint_K 2y - 2xy \, dx dy$

Et en passant en coordonnées polaires (par exemple), on a

$I = \iint_K 2y - 2xy \, dx dy = \iint (2r\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta \; r\, dr d\theta$

et $(x,y) \in K \iff r \in [0,1]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\sin\theta - 2r^3\sin\theta\cos\theta \, d\theta dr$

donc $I = \int_0^1 \left[-2r^2 \cos\theta - r^3 (\sin\theta)^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \int_0^1 2r^2 - r^3 \, dr = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

On trouve bien le même résultat.