Exo 1 :

1) $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$

$a = 1 \qquad x \to a$

on pose $h = x - 1 \qquad h \to 0$

$$f_1(h) = \frac{\sqrt{h+1+3}}{h+1} = \frac{\sqrt{4+h}}{h+1} = \frac{\sqrt{4(1+h/4)}}{1+h}$$

$$= \frac{2\,(1+h/4)^{1/2}}{1+h}$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{h}{4}\right)^2 + o(h^2)\right]\left[1 - h + h^2 + o(h^2)\right]$$

$$= 2\left[1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128} + o(h^2) \cancel{\;+o(h^2)}\right]\left[1 - h + h^2 + o(h^2)\right]$$

$$= 2\left[1 - h + h^2 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{128} + o(h^2)\right]$$

$$= 2\left[1 - \frac{7}{8}h + \frac{111}{128}h^2 + o(h^2)\right]$$

$$= 2 - \frac{7}{4}h + \frac{111}{64}R^2 + o(h^2)$$

$$\boxed{f_1(x) = 2 - \frac{7}{4}(x-1) + \frac{111}{64}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)}$$

2) $\cos(3x) = 1 - \dfrac{(3x)^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos(3x) - 1 = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$f_2(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{-\frac{9}{2}x^2}$$

$$\boxed{f_2(x) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

Exo 1 :

4) $f_4(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$

$x \longrightarrow -\infty$

$t = \dfrac{1}{x}$ ainsi $t \to 0$

$$f_4(t) = \frac{(1/t)^2}{2\cdot\frac{1}{t}+1} = \frac{1/t^2}{\frac{2+t}{t}}$$

$$= \frac{t}{2+t}\cdot\frac{1}{t^2}$$

$$= \frac{1}{t(2+t)}$$

$$= \frac{1}{2t(1+t/2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t/2} \qquad \frac{t}{2}\to 0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\left[1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t + o(t)$$

$$\boxed{f_4(x) = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$\Delta : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$
et quand $x \to -\infty$ $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x} < 0$
donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de Δ

3) $x \longrightarrow +\infty$ $t = 0$

$$f_3(x) = \frac{1}{t^2}\left(\ln\left(\frac{1/t+1}{1/t}\right) - \sin(t)\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\ln(1+t) - \sin(t)\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(t - t^2/2 - t + o(t^2)\right)$$

$$= -1/2$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \frac{-1}{2}}$

Ex02 :

- $F+G = \{ u \in E / \exists f \in F, \exists g \in G / u = f+g \}$

- $F+G$ est 1 sev de E car

i) $0_E \in F+G$: en effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ car F sev et $0_E \in G$ car G sev

ii) Soient $u_1 \in F+G \Rightarrow \exists f_1 \in F$, $\exists g_1 \in G$ / $u_1 = f_1 + g_1$

$u_2 \in F+G \Rightarrow \exists f_2 \in F$, $\exists g_2 \in G$ / $u_2 = f_2 + g_2$

alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha u_1 + u_2 = \underbrace{(\alpha f_1 + f_2)}_{\in F \text{ car } F \text{ sev}} + \underbrace{(\alpha g_1 + g_2)}_{\in G \text{ car } G \text{ sev}}$$

ainsi $\alpha u_1 + u_2 \in F+G$

Exo 3

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x+2y-z=0\}$

1) • $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0+2.0-0=0$

• Soit $u \in F$ $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \; x+2y-z=0$

$v \in F$ $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} / \; x'+2y'-z'=0$

alors

$\alpha u+v$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x+x' \\ \alpha y+y' \\ \alpha z+z' \end{pmatrix}$

et $\alpha x+x'+2(\alpha y+y')-(\alpha z+z')$

$= \alpha(x+2y-z)+(x'+2y'-z')$

$= 0$

ainsi $\alpha u+v \in F$

donc F s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$ on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in F$ donc comme il s'agit de deux vecteurs non colinéaires il s'agit d'une famille libre de 2 vecteurs de F.

3) comme $F \subseteq \mathbb{R}^3$

si $\dim(F) = 3$ on aurait $F = \mathbb{R}^3$

or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$

donc F ne peut être de dimension 3.

par 2) $\text{Span}(u,v) \subseteq F \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow 3 > \dim F \geq 2$ car (u,v) famille libre

$\Rightarrow \dim F = 2$

Exo 4 :

1) u et v sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^2$

2) On cherche a et b scalaires /

$$w = au + bv$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b \\ 10 = 3a - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 10 = 3 - 6b - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{w = 3u - v}$$

Exo 5:

Soient a, b, c des scalaires/

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (S)$$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=0 \\ 2a+b+2c=0 \\ a+3b-c=0 \end{cases} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a+2c=0 \\ -2a-c=0 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 0=-2c \\ -5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=0 \end{cases}$

donc (u_1, u_2, u_3) est 1 famille libre

E est 1 e.v de dimension 4
donc 1 famille génératrice aura 4 vecteurs au plus
ainsi (u_1, u_2, u_3) ne peut être génératrice
de E.

$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ $\quad G = \text{Vect}(v)$

(u_1, u_2, u_3) est 1 famille génératrice
de F et de plus elle est libre (cf Q2)) $(\dim G = 1)$
donc $\dim F = 3$

Soient a, b, c, d scalaires/

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ 2a+b+2c+d=0 \\ d=0 \\ a+3b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=b=c=0 \\ \text{car } (u_1, u_2, u_3) \text{ est libre} \end{cases}$

Ainsi (u_1, u_2, u_3, v) est 1 famille libre de 4 vecteurs
de $\mathbb{R}^4$ donc 1 base de $\mathbb{R}^4$
donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

dans $\mathbb{R}^4$

Exo 6:

1) $F = \{ f \in E / \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / f(x) = ax^3 + bx \}$

$F = \text{Span}(f_1, f_2)$ $\quad f_1 : x \longmapsto x^3$, $f_2 : x \longmapsto x$

$= \text{Gr}(f_1, f_2)$

est 1 famille de 2 vecteurs non colinéaires donc libres

ainsi $\dim F = 2$

2) $G = \{ f \in E / \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0 \}$

- La fonction nulle est dans G
- soit $f_1 \in G$ alors $\int_{-1}^{1} f_1(t)\,dt = 0$

  $f_2 \in G$ alors $\int_{-1}^{1} f_2(t)\,dt = 0$

et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha f_1 + f_2$ satisfait par linéarité de l'intégrale $\int_{-1}^{1} (\alpha f_1 + f_2)(t)\,dt = \alpha \int_{-1}^{1} f_1(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f_2(t)\,dt = 0$

ainsi $\alpha f_1 + f_2 \in G$

donc G est un sous espace vectoriel de E.

$H = \{ f \in E / (f(1))^2 = f(0) \}$

soit f/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ $\quad f \in H$

soit g/ $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = x^3 - x + 1$

$(g(1))^2 = 0+1 = g(0)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = x^3 - x + 1 + 1$

$((f+g)(1))^2 = (1+1)^2 = 4$

$(f+g)(0) = 2$

$4 \neq 2$

donc H n'est pas 1 sev car non stable par combinaison linéaire.

3) $f \in F \cap G \Rightarrow \exists a,b /$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^3 + bx$

et $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$

$\Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} \right) = 0$

$\Rightarrow 0 = 0$ toujours vrai à savoir $F \subseteq G$

donc $F \cap G = F$ car $F \subseteq G$

Ainsi $F + G = G$ car $F \subseteq G$