Exo 1:

$B = (e_1, e_2)$

$\dim E = 2$,

Soient a, b scalaires / $a(e_1+e_2) + b(e_1-e_2) = 0_E$

$\Leftrightarrow (a+b)e_1 + (a-b)e_2 = 0_E$

Comme (e_1, e_2) est 1 base de $\mathbb{R}^2$ c'est 1 famille libre $\Rightarrow$ $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

Ainsi $\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$ est 1 famille libre de 2 vecteurs $\Rightarrow$ 1 base de E.

$u = 2e_1 + 2e_2$

$= a(e_1+e_2) + b(e_1-e_2)$

$= (a+b)e_1 + (a-b)e_2$ $\Rightarrow$ l'unicité d'écriture sur la base (e_1, e_2)

$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$

u a pour coordonnées (2, 0) dans B'.

Exo 2:

$(e_1; e_2; e_3)$ base de E donc 1 famille libre et génératrice

1. Si f est injective alors $(f(e_1); f(e_2); f(e_3))$ est libre
2. Si f est surjective alors $(f(e_1); f(e_2); f(e_3))$ génère F.

(En revanche on a pas $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

Exo 5 :

1)
$\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0,0)\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=0 \\ -x+5y=0 \end{cases}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} y=2x \\ 5x=0 \\ 9x=0 \end{cases}\} = \{(0,0)\}$

$\boxed{\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$ $\dim(\ker f) = 0$

$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1,0),(0,1))$
$\Rightarrow \text{Im} f = \text{vect}(f(1,0), f(0,1))$ $\Rightarrow \boxed{\text{Im} f = \text{Vect}\{(2,1,-1), (-1,2,5)\}}$
or les vecteurs $(2,1,-1)$ et $(-1,2,5)$ ne sont pas colinéaires,
$\Rightarrow rg f = 2$ et **base de Im f** $= \{(2,1,-1); (-1,2,5)\}$,

2) Comme $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ f est injective,
f n'est pas surjective car $\text{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^3$.

3) f ne peut être un isomorphisme car f n'est pas bijective et car $\dim E \neq \dim E'$

Exo 6 : $f \in \mathcal{L}(E,E')$

$\Rightarrow$ Supposons que f soit injective

- $0_E \in \ker f$
En effet $x + (-x) = 0_E$
$\Rightarrow f(x+(-x)) = f(0_E)$ $\quad$ car $f \in \mathcal{L}(E,E')$
$\Rightarrow f(x) - f(x) = f(0_E)$
$\Rightarrow f(0_E) = 0_{E'}$

Donc $\{0_E\} \subseteq \ker f$

- Maintenant soit $x \in \ker f$
$\Rightarrow f(x) = 0_{E'}$
$\Rightarrow f(x) = f(0_E)$ or f est injective
$\Rightarrow x = 0_E$
$\Rightarrow \ker f \subseteq \{0_E\}$

Par double inclusion
$\ker f = \{0_E\}$

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker f = \{0_E\}$
Soient $x_1 \in E$, et $x_2 \in E$ /
$f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_E$
$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_E$ car $f \in \mathcal{L}(E,E')$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f$
or par hypothèse $\ker f = \{0_E\}$
$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E$
$\Rightarrow x_1 = x_2$
$\Rightarrow$ f est injective

Exo 7 :

$\dim E = 3$
$\dim F = 2$
$\dim(\mathrm{Im} f) = 1$

1) Par le thm du rang $\dim E = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f)$

$\Rightarrow \dim(\ker f) = 2$

donc oui il est possible d'avoir $\dim(\ker f) = 2$.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y+z,\ 2(x+y+z))$$

ici $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1,0,0); f(0,1,0); f(0,0,1))$
$= \mathrm{Vect}((1,2); (1,2); (1,2))$
$= \mathrm{Vect}((1,2))$ $\quad \mathrm{rg} f = 1$

et $\ker f = \{(x,y,z) / \ x+y+z = 0\} = \{(x,y,-x-y),\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ $\dim \ker f = 2$

2) Non il n'est pas possible d'avoir $\dim(\ker f) = 1$:
en effet d'après le thm du rang $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$
$\Rightarrow \dim(\ker f) = 2$.

Exo 4 : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y=0 \text{ et } x-z=0\}$

méthode 1 :

- $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0+0=0$ ET $0-0=0$
- Soient u de coordonnées (x,y,z)
  v ——— (x',y',z')

tels que $u \in F \Rightarrow x+y=0$ ET $x-z=0$
$v \in F, \Rightarrow x'+y'=0$ ET $x'-z'=0$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$

$\alpha u + v$ a pour coordonnées
$\alpha(x,y,z) + (x',y',z') = (\alpha x+x', \alpha y+y', \alpha z+z')$

et $\alpha x + x' + \alpha y + y' = \underbrace{\alpha(x+y)}_{=0} + \underbrace{(x'+y')}_{=0 \text{ car } v \in F}$ car $u \in F$
$= 0$

$\alpha x + x' - (\alpha z + z') = \alpha(x-z) + (x'-y')$
$= 0$ car $u \in F$, $v \in F$

ainsi
$\forall u \in F$
$\forall v \in F$
$\alpha \in \mathbb{K}$
$\alpha u + v \in F$

méthode 2 :

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ y = -x \text{ et } z = x\}$
$= \{(x,-x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$
$F = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$

F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est une droite vectorielle.

Conclusion :

F s.e.v de $\mathbb{R}^3$

Exo 5

$v_1 = 3e_1 - e_2 + 2e_3$
$v_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$
$v_3 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$

$\text{rang}\{v_1, v_2, v_3\} = \dim \text{Vect}(v_3, v_2, v_3)$

cherchons à déterminer si cette famille est libre ou liée : soient a, b, c des scalaires

$$a\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b+3c=0 & (L_1)\\ -a-2b+4c=0 & (L_2)\\ 2a+b+c=0 & (L_3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a-3c\\ -a+6a+6c+4c=0\\ 2a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3c\\ a=-2c\\ -4c+3c+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3c\\ a=-2c\\ 0=0\end{cases}$$

Cette famille de vecteurs est donc liée $\Rightarrow 2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0_E$

Or si on enlève à 1 famille génératrice 1 vecteur qui se décompose en cette famille, elle reste génératrice : $\boxed{\text{rang}\{v_1, v_2, v_3\} = \dim \text{vect}(v_1, v_2) \\ \text{rang} = 2}$ car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires

Exo 7 : $p : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $aX^2+bX+c \longmapsto bX$

1) $\forall P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ $\exists a,b,c$ / $P_1 = aX^2+bX+c$
$\forall P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ $\exists a',b',c'$ / $P_2 = a'X^2+b'X+c'$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_1 + P_2 = (\alpha a + a')X^2 + (\alpha b + b')X + (\alpha c + c')$

$p(\alpha P_1 + P_2) = (\alpha b + b')X = \alpha bX + b'X = \alpha p(P_1) + p(P_2)$

donc p est une application linéaire

2) $\ker p = \{ aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, p(aX^2+bX+c) = 0 \}$
$= \{ aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, bX = 0 \}$
$= \{ aX^2 + c,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \}$
$= \text{vect}(X^2, 1)$

or $(1, X^2)$ est 1 famille libre car les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires
$\Rightarrow$ $(1, X^2)$ est 1 base de $\ker p$

$\text{Im} p = \text{vect}(p(1), p(X), p(X^2))$ car $(1, X, X^2)$ est 1 base de $\mathbb{R}_2[X]$
$= \text{vect}(X)$ car $p(1) = p(X^2) = 0$ (polynôme nul), $p(X) = 1.X$

X est 1 base de $\text{Im} p$

3). $\forall P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ $\exists a,b,c$ réels / $P_1 = aX^2+bX+c$

$(p \circ p)(P_1) = p(p(P_1)) = p(bX) = bX = p(P_1)$

$\Rightarrow \boxed{p \circ p = p}$

4). $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$\Leftrightarrow F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$ avec $F = \text{Vect}(1, X^2) = \ker p$ ET $G = \text{Vect}(X) = \text{Im} p$

$\Leftrightarrow \boxed{\ker p \oplus \text{Im} p = \mathbb{R}_2[X]}$