Exo1

① $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x+3y^2$

Injective ?

$f_1(0,0) = f_1(-3,1)$

or $(0,0) \neq (-3,1)$

donc f_1 n'est pas injective de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$

Surjective ?

$\forall z \in \mathbb{R}$, $f_1(z,0) = z$

donc z admet bien au moins 1 antécédant par f

$\Rightarrow f_1$ surjective de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$

donc f_1 n'est pas bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

② $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (x+1, -x)$

Injective ?

$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$\Leftrightarrow (x_1+1, -x_1) = (x_2+1, -x_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \end{cases}$

donc f_2 injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Surjective ?

Par exemple $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ or $(1,1)$ n'est pas atteint par f_2

car $f_2(x) = (1,1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ -x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ contradiction

donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f_2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}^2$

③ $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y, x-2y)$

Injective ?

$\forall (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$f_3(x_1,y_1) = f_3(x_2,y_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-2y_1 = x_2-2y_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3x_2 & (2L_1)+(L_2) \\ 3y_1 = 3y_2 & (L_1)-(L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f injective de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}^2$

Surjective ?

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = a \\ x-2y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a+b}{3} \\ y = \frac{a-b}{3} \end{cases}$

ainsi $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (a,b) admet exactement 1 antécédant par f

$\Rightarrow$ f est surjective et même bijective de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}^2$.

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b) \longmapsto \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a-b}{3}\right)$.

Exo 2 : f bijection de I dans J
f impaire.

- $\forall y \in J \quad \exists! x \in I / y = f(x)$ donc $-y = -f(x) = f(-x)$
avec $-x \in I$ car f impaire, ainsi $-y \in J$

- $\forall y \in J, \exists! x \in I / y = f(x)$ car f bijection de I ds J

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \quad \text{or } f \text{ impaire}$$
$$= f^{-1}(f(-x))$$
$$= -x$$
$$= -f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow$ f^{-1} est donc impaire

Exo 3 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, e^y) \end{array}$$

Injective ?

$(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2, (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 /$
$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ e^{y_1} = e^{y_2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

f est donc bien injective

Surjective ?

$(0,-1)$ n'a pas d'antécédant par f

$\Rightarrow f$ non surjective

Exo 4:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -x^2+1$$

1) $f([-2,1]) = \{ f(x),\ -2 \le x \le 1 \}$

$= \{ f(x),\ -2 \le x \le 0 \text{ ou } 0 \le x \le 1 \}$

$= \{ f(x),\ 0 \le x^2 \le 4 \text{ ou } 0 \le x^2 \le 1 \}$

$= \{ \text{——},\ -4 \le -x^2 \le 0 \text{ ou } -1 \le -x^2 \le 0 \}$

$= \{ \text{——},\ -3 \le 1-x^2 \le 1 \text{ ou } 0 \le 1-x^2 \le 1 \}$

$= [-3,1] \cup [0,1]$

$= [-3,1]$

2) $f^{-1}([-6,-5]) = \{ x \in \mathbb{R} / \ f(x) \in [-6,-5] \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} / \ -6 \le -x^2+1 \le -5 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} / \ -7 \le -x^2 \le -6 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} / \ 6 \le x^2 \le 7 \}$

$= \{ \text{——} / \ \sqrt{6} \le |x| \le \sqrt{7} \}$

$= \{ \text{——} / (x \le -\sqrt{6} \text{ ou } x \ge \sqrt{6}) \text{ et } x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}] \}$

$= [-\sqrt{7}, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \sqrt{7}]$

$f(x) = 1-x^2$

3) $f'(x) = -2x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

- sur $]-\infty, 0]$

f est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $I_1 =]-\infty, 0]$ ds $J_1 = f(I_1) =]-\infty, 1]$

et $\forall x \in I_1,\ y \in J_1$

$y = 1 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y$

$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{1-y}$ car $y \in J$ $1-y \geq 0$

or $x \in I_1$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{1-y}$

$f^{-1} : J_1 \longrightarrow I_1$

$y \longmapsto -\sqrt{1-y}$

- **Sur $[0, +\infty[$**

f est continue et strictement décroissante donc réalise 1 bijection de $I_2 = [0, +\infty[$ dans $J_2 = f(I_2) =]-\infty, 1]$

$\forall x \in I_2,\ y \in J_2$

$y = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y$

$\Leftrightarrow |x| = 1 - y$

$\Leftrightarrow x = +\sqrt{1-y}$ car $x \in I_2$

$f^{-1} : J_2 \longrightarrow I_2$

$y \longmapsto +\sqrt{1-y}$

Exo 5:

$y = \text{Argch}(\text{ch}x)$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $\text{ch}y = \text{ch}x$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $(y = x$ ou $y = -x)$ car ch paire

$\Leftrightarrow y = |x|$

Exo 6 :

1) $f(x) = \cos x \ \ln(1+x)$

$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

2) $f(x) = \cos(x/2)$

$f(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{2} + o(x^3)$

$$\boxed{f(x) = 1 - x^2/8 + o(x^3)}$$

3) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$f(x) = (1+x^2)^{1/2}$ $\quad x^2 \to 0$ quand $x \to 0$

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$$

4) quand $x \to 0$ $\quad x+5 \not\to 0$

donc nous pouvons utiliser une division suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} 3+x & 5+x \\ \hline -3 - 3/5\,x & 3/5 + \frac{2}{25}x - \frac{2}{125}x^2 \\ \hline 2/5\,x & \\ -2/5\,x - \frac{2}{25}x^2 & \\ \hline -2/25\,x^2 & \\ +2/25\,x^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{3+x}{5+x} = 3/5 + \frac{2}{25}x - 2/125\,x^2 + o(x^2)}$$

5) $f(x) = \cos(x+1)$

$f'(x) = -\sin(x+1)$

$f''(x) = -\cos(x+1)$

$f'''(x) = \sin(x+1)$

$f^{(iv)}(x) = \cos(x+1)$

$f(0) = \cos 1$

$f'(0) = -\sin(1)$

$f''(0) = -\cos 1$

$f'''(0) = \sin 1$

$f^{(iv)}(0) = \cos 1$

Par la formule d'Euler mac Launin car f est C^∞

$$f(x) = \cos 1 + (-\sin 1)\, x + (-\cos 1)\frac{x^2}{2} + (\sin 1)\frac{x^3}{6} + (\cos 1)\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

6)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)}$$

qd $x \to 0$ $1 + \frac{x}{2} + \dots \to 0$

on va donc utiliser la division suivant les puissances croissantes $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12}$

$$1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \quad \Big| \quad 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} \quad \Big| \quad 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$+\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$$

$$-\frac{1}{12}x^2 + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$+\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3$$

$$\frac{1}{12}x^3$$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}$$

7) $f(x) = \ln x$

$x \to 1 \quad h = x - 1 \quad -h \to 0$

$f(x) = \ln(1+h) \quad h \to 0$

$= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$

donc

$$\boxed{f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

Exo 7 :

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ (bijection)

$f(x) = \ln(\arcsin x)$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x \in [-1,1] \text{ et } \arcsin x > 0\}$

$=]0,1]$ car $\arcsin x > 0$

$\Leftrightarrow x \in [-1,1]$ et $\sin(\arcsin x) > 0$ car $\sin > 0$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

$\Leftrightarrow$ ——— $x > 0$

2) $x \longmapsto \arcsin x$ est dérivable sur $]0,1[$

et $\ln$ sur $]0,+\infty[$

donc par composée

f est dérivable sur $]0,1[$

et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{1}{\arcsin(x)}$

3) Par le thm de la limite dérivée

$\hat{c}$ f est C^1 sur $]0,1[$ et continue en 1 $\hat{c}$ composée,

$\hat{c}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = +\infty$

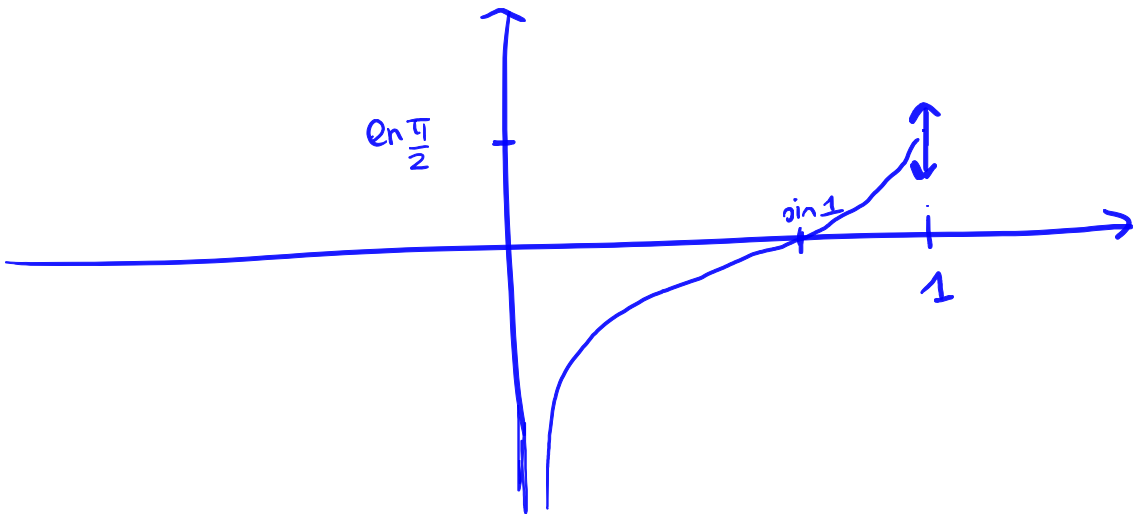
$\Rightarrow$ on aura 1 1/2 tangente verticale en 1.

4) • $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

•

x	0		1
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln \pi/2$

$\arcsin x > 0$ car $x > 0$



$$\ln(\arcsin x) = 0 \iff e^{\ln(\arcsin x)} = 1$$
$$\iff \arcsin x = 1$$
$$\iff x = \sin 1.$$

Exo 8 :

1) $A \in M_{(3,2)}(\mathbb{R})$ $\quad B \in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$

AB existe car $(3,\textcircled{2}) \times (\textcircled{2},3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \\ 9 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

BA existe car $(2,\textcircled{3}) \times (\textcircled{3},2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow A$ inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$