Exo 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x^3 y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = x^3 y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4}{4} y + A(y) \quad \text{où } A \text{ fonct } C^1$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^5}{20} y + a(y).x + B(y)$$

$a(y)$ et $B(y)$ 2 fonctions de y

Exo 2 $f(x,y) = g(x^2 y)$

$(x,y) \longrightarrow (x^2 y = u) \longrightarrow g(u) = f(x,y)$

Par la règle de composition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dg}{du}$$

$$= 2xy \frac{dg}{du}$$

$$= 2xy\, g'(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy\, g'(u)\right)$$

$$= 2x\, g'(u) + 2xy \frac{\partial}{\partial y}\left(g'(u)\right)$$

$$= 2x g'(u) + 2xy \left[\frac{\partial u}{\partial y} g''(u)\right]$$

$$= \boxed{2x g'(u) + 2xy \cdot x^2 g''(u)}$$

Exo3: $t = vu^2 + \frac{1}{u}$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial v}dv$$

$$= \left(2uv - \frac{1}{u^2}\right)du + (u^2)dv$$

et $dv = 2v\,dx = 2e^{2x}\,dx$

$du = \frac{1}{1+x}\,dx$

$$\Rightarrow dt = \left(2uv - \frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{1}{(1+x)}dx + \left(\ln(1+x)\right)^2 \cdot 2e^{2x}dx$$

ou bien

$x \longmapsto (v,u) \xrightarrow{g} t(x) = g(v,u)$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dx}\times\frac{\partial g}{\partial v}(v,u) + \frac{du}{dx}\frac{\partial g}{\partial u}(v,u)$$

$$= 2e^{2x}u^2(x) + \frac{1}{1+x}\left(v(x)\,2u(x) - \frac{1}{u^2(x)}\right)$$

$\Rightarrow dt = \frac{dt}{dx}dx.$

Exo4 $z = 3xy = f(x,y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x$

L'equat° du plan tangent à (S) en $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) - z = 0$$

1 vecteur normal à (T) est $\overrightarrow{n_T}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y_0\\3x_0\\-1\end{pmatrix}$

$(T) \parallel (P)$ $\quad (P): x+2y+3z=1$ $\quad \overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs normaux sont colinéaires

$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_T} = c\,\overrightarrow{n_P}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3y_0\\3x_0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\2c\\3c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3y_0 = c\\3x_0 = 2c\\3c = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0 = c/3 = -1/9\\x_0 = 2/3\,c = -2/9\\c = -1/3\end{cases}$$

Le point cherché sur (S) est $M_0\left(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, f\left(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right)\right)$.

Exo 5 :

$$(\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 \quad \text{donc par le binôme}$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$= \frac{1}{2^4}\left[(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6\,e^{2ix}e^{-2ix} + 4\,e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right]$$

$$\boxed{(\cos x)^4 = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}}$$

$$\int (\cos x)^4 dx = \frac{1}{8}\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{8}x + C$$

Exo 6:

1) $z = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta}$

- $|z| = 1$
- $\arg(z) = 2\theta \ [2\pi]$
- forme algébrique : $z = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{R\omega} + j\dfrac{RC}{L\omega}$

$$\frac{1}{z} = \frac{L + jR^2C}{RL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{RL\omega}{L + jR^2C} = \frac{RL\omega(L - jR^2C)}{L^2 + R^4C^2}$$

$$|z| = \frac{|RL\omega|}{|L + jR^2C|} = \frac{RL\omega}{\sqrt{L^2 + R^4C^2}}$$

donc $z = |z|\left[\dfrac{L}{\sqrt{L^2+R^4C^2}} - j\dfrac{R^2C}{\sqrt{L^2+R^4C^2}}\right]$

$= |z|\, e^{i\theta}$ / avec $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{L}{\sqrt{1+R^4C^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-R^2C}{\sqrt{1+R^4C^2}} \end{cases}$

ou bien $\theta = \tan^{-1}\left(-\dfrac{R^2C}{L}\right)\ [2\pi]$

$\Leftarrow$ car $\cos > 0$, $\sin < 0$

et $\tan^{-1} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Exo 7 :

1)

$(2z+i)^3 = -1$ (1)

on pose $Z = 2z+i$

(1) $\Leftrightarrow$ $Z^3 - 1 = e^{i\pi}$ soit $Z = re^{i\theta}$

(1) $\Leftrightarrow$ $(re^{i\theta})^3 = -1 = e^{i\pi}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} r^3 = 1 \text{ et } r > 0 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/3 + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ $Z = \underset{(k=0)}{e^{i\pi/3}}$ ou $Z = \underset{(k=1)}{e^{i\pi}} = -1$ ou $Z = \underset{(k=2)}{e^{\frac{5i\pi}{3}}} = e^{-i\pi/3}$

(1) $\Leftrightarrow$ $2z+i = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ ou $2z+i = -1$ ou $2z+i = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right)$ ou $z = \frac{-1-i}{2}$ ou $z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right)$

2)

$z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0 \quad (1)$

$\Delta = [-(5-i)]^2 - 4 \times (8-4i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 16i$

$= -8 + 6i$

cherchons les racines de Δ,

$\delta = x + iy$ /

$\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

$\delta^2 = \Delta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases}$

$\delta_1 = 1 + 3i \quad \delta_2 = -1 - 3i$ car $xy > 0$ donc x et y de même signes.

$(1) \Leftrightarrow z = \dfrac{5 - i - (1+3i)}{2} = \dfrac{4-4i}{2} = 2 - 2i$

ou $z = \dfrac{5 - i + (1+3i)}{2} = \dfrac{6+2i}{2} = 3 + i$

$S = \{2 - 2i, 3 + i\}$

Exo 8:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

1) $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = r\cos^2\theta$ et $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$

donc par le thm des gendarmes, $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

ainsi f est continue en $(0,0)$

2) Par $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{2x(x^2+y^2) - x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

pr passage en polaire

$$= \frac{r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\sin^2\theta}{(r^2)^{3/2}}$$

$$= \cos^3\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta$$

La limite dépend de θ

si $\theta \to 0$ la limite est 1
si $\theta \to \frac{\pi}{4}$ la limite est $2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \ldots$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas.

3) Par déf

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h/\sqrt{h^2}}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$ donc cette limite n'existe pas

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas

$$= \begin{cases} h\to 0^+ & 1 \\ h\to 0^- & -1 \end{cases}$$

4) f n'est pas C^1 en $(0,0)$

car $\partial f/\partial x\,(0,0)$ n'existe pas.

donc $(x,y) \longmapsto \partial f/\partial x\,(x,y)$ non continue en $(0,0)$

5) Si f différentiable en $(0,0)$

alors les dérivées partielles existent

$\Rightarrow$ donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$