DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (6 points)
Calculer les primitives ou intégrales suivantes :
1) $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$, 2) $\int_1^2 \frac{1}{3+e^{-x}} dx$ en posant $u = e^t$, 3) $\int \frac{3e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt$,
4) $\int \ln(1+t^2) dt$ 5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ en posant $x = y^2$ et $y > 0$.

Exercice 2. (3 point)
Calculer cette primitive à l'aide des règles de Bioche. $\int \frac{3-\sin(x)}{\frac{1}{2}\cos(x)+3\tan(x)} dx$

Exercice 3. (3 points)
Soit f une fonction intégrale au sens de Riemann, sur un intervalle $[a, b]$. Prouver les propriétés suivantes :

- si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geqslant 0$
- si $g \geqslant f$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b g \geqslant \int_a^b f$

avec f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$

Exercice 4. (3 points)
Soit f les fonctions suivantes, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions et étudier la limite en $(0, 0)$.

1. $f(x, y) = \frac{e^{xy^2} - 1}{xy}$
2. $f(x, y) = \frac{x\sqrt{x+y}}{y}$

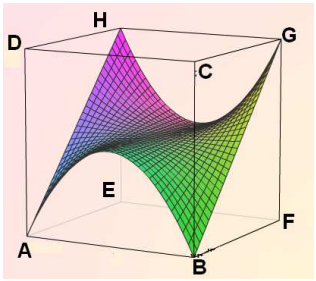
Exercice 5. (3 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x + y)\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$, pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. f est-elle continue en (0,0) ?
2. Calculer la dérivée partielle de f par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$.

3. f est-elle de classe C^1 en $(0,0)$?

Exercice 6. (2 points)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y$. Soit (S) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Dans quel plan se trouve la ligne de niveau de (S) des points $M(2, y, f(2,y)), y \in \mathbb{R}$? Quelle est la nature de cette ligne de niveau ?
2. Dans quel plan se trouve la ligne de niveau de (S) des points $M(x, -1, f(x,-1)), x \in \mathbb{R}$? Quelle est la nature de cette ligne de niveau ?
3. On a représenté ci-contre (S) dans le cube $(ABCDEFG)$ pour $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]$, les axes du repère étant parallèles aux côtés du cube.
   Exprimer en fonction des sommets du cube les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, et situer le point O dans le cube en justifiant votre réponse.



Rappel :

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in$ ...
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\operatorname{Argth} u$	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} u$	$]-1;1[$
$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arccos} u$	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\operatorname{Argsh} u$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\operatorname{Argch} u$	$]1;+\infty[$