DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2 points)
Soit n un entier naturel non nul, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k^2}{n^2}}$$

, Déterminer la limite de la somme précédente quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. (6 points)
Calculer les intégrales ou donner toutes les primitives dans les cas suivant :

$$1, \int x^2 \sin(2x) dx$$

$$2 \int \sin^3(x) dx$$

$$3, \int \frac{2x^3 + \ln(x) + 3x^5}{x} dx$$

$$4, \int \frac{3x+2}{x^2+9} dx$$

$$5, \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x}+x} dx \quad \text{en posant} \quad u = \sqrt{x}$$

Exercice 3. (2 points)
Avec la règle de Bioche, donner le changement de variable le plus simple à utiliser pour calculer cette primitive puis effectuer le calcul :

$$\int \frac{\cos^2 t - \sin t}{\tan t} dt$$

Exercice 4. (4 points)
Considérons la fonction de deux variables f définie ci dessous :

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

1. f est elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$?
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe t'elle en $(0,0)$?
4. f est elle une fonction de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5. (1,5 points)

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

1. On pose $u = x + y \quad v = x - y$ et $F(u,v) = f(x,y)$. Démontrer que $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$
2. Conclure.

Exercice 6. (2 points)
Soit les fonctions suivantes : f et g avec (r,θ) les coordonnées polaires telles que

$$f(x,y) = g(r,\theta)$$

.
Exprimer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ en fonction de f, r et θ.

Exercice 7. (2,5 point)
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Considérons la surface d'équation $z = xe^{x^2 y}$. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface en $M(0,1,0)$.
2. Soit la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^2 \sin(xy)$.

(a) Calculer son gradient en $(1;2)$.

(b) Exprimer la différentielle de f en $(2;\dfrac{\pi}{2})$.

Rappel :

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in ...$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{1-u^2}$	$\operatorname{Argth} u$	$]-1;1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} u$	$]-1;1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\operatorname{Argsh} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\operatorname{Argch} u$	$]1;+\infty[$