DS 1 M2.E Correction.

Exercice 1 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(u+\lambda v) = f\left(\begin{pmatrix} x+\lambda a \\ y+\lambda b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+\lambda a)+3(y+\lambda b) \\ x+\lambda a-(y-\lambda b) \\ x+\lambda a+y+\lambda b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} = f(u)+\lambda f(v)$$

f est une application linéaire.

2) $\underline{\text{Ker } f}$: $u \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad L_2+L_3 \rightarrow x=0 \rightarrow y=0$$

$\text{Ker } f \subseteq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ or $f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $\text{Ker } f = \{0_E\}$

3) f est injective.

4) $\text{Im } f = \text{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2 vecteurs non colinéaire donc libre et générateur de $\mathrm{Im} f$: une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 :

$F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ $\quad G = \mathrm{Vect}(t, n)$

1] n et t ne sont pas colinéaires $\Rightarrow \dim G = 2$.

(u, v, w) libre ? $\alpha ; \beta ; \gamma$ / $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$

u, v, w sont libres

donc $\dim F = 3$.

2] $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

donc $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G$.

$= 5 - \dim(F+G)$

$F \subset F + G \subset \mathbb{R}^4$ donc $3 \leq \dim F + G \leq 4$

donc $1 \leq \dim F \cap G \leq 2$

Exercice 3 :

$2u + 3v$ est une combinaison linéaire de u et v.

donc $\mathrm{Vect}(u, v, 2u + 3v) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

si (u, v) est libre $\quad \mathrm{rg}(u, v) = 2$

sinon $\quad \mathrm{rg}(u, v) = 1$

car u et v non nuls

Exercice 4 :

$u_n = 2 \dfrac{n-1}{n+1} u_{n-1} \quad n \geq 2 \quad u_1 \in \mathbb{R}$

1) $U_{n-1} = 2\,\dfrac{n-2}{n}\,U_{n-2}$

$U_{n-2} = 2\,\dfrac{n-3}{n-1}\,U_{n-3}$ ...

$U_n = 2^2\,\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\,U_{n-2} = 2^3\,\dfrac{n-1\;\;n-2\;\;n-3}{n+1\;\;\;n\;\;\;n-1}\,U_{n-3}$...

Conjecture

$$U_n = 2^{n-1}\,\frac{(n-1)!\times 2}{(n+1)!}\,U_1$$

$P(n)$: $U_n = 2^n\,\dfrac{1}{(n+1)\cdot n}\,U_1$

Dém par récurrence :

pour $n=1$ $\quad 2\,\dfrac{1}{2\times 1}\,U_1 = U_1$ $\quad$ OK

si Vraie au rang n : Supposons $P(n)$ vraie pour 1 entier $n \geq 1$

A t'on $P(n+1)$: $U_{n+1} = 2^{n+1}\,\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}\,U_1$?

$$U_{n+1} = 2\,\frac{n}{n+2}\,U_n \xrightarrow{\text{car HR}} = 2\,\frac{n}{n+2}\;2^n\,\frac{1}{(n+1)\,n}\,U_1$$

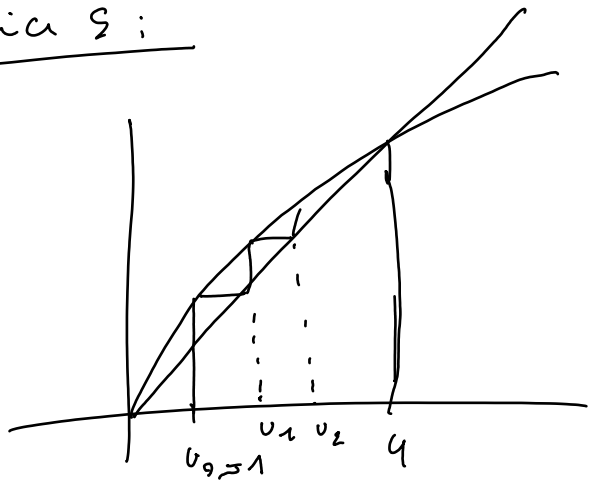
$$= 2^{n+1}\,\frac{1}{(n+2)(n+1)}\,U_1 \;/\; \text{OK}$$

$P(n+1)$ vraie.

la récurrence est vérifiée : $\forall n \geq 1$ $P(n)$ vraie

Exercice 9 :

1]



2] Pour $x > 0$

$f(x) = x \iff x = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$

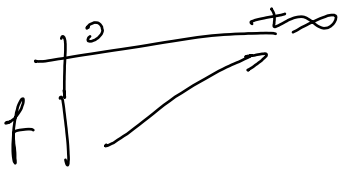
$\iff \frac{x}{2} = \sqrt{x}$

$\iff \frac{x^2}{4} = x \iff \frac{x^2}{4} - x = 0$

$\iff x\left(\frac{x}{4} - 1\right) = 0$ $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 4}$

Pour $x > 0$,

3] $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$



4] Si $I = [0;4]$ $f(I) = [0;4] = I$

et $u_0 \in I$ donc (u_n) est bien définie et $\forall n$ $u_n \in I$

5] f est ↗ sur I et $u_1 = f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > u_0$

donc (u_n) est croissante.

6] $u_n \in I$ donc majorée par 4.

7] u_n est ↗ et majorée donc CV par le thm de la limite monotone vers ℓ

$f(\ell) = \ell$ et $\ell \geq u_0$ donc $\underline{\ell = 4}$

car f continue

8] si $u_0 = 5$ $f(5) = \frac{5}{2} + \sqrt{5}$ $u_1 < u_0$

donc U_n sera suite décroissante et minorée par 4

donc tend vers 4.

(car ici $I = [4, +\infty[$
$f(I) = I$
et $u_0 \in I$
$\Rightarrow \forall n, u_n \in I$)

Exercice 6 :

1] $U_n = 2 \sum_{1}^{n} k + 5 \sum_{k=1}^{n} (a+2)^k$

$= 2 \frac{n(1+n)}{2} + 5 \underbrace{\left[\frac{1 - (a+2)^{n+1}}{1-(a+2)} - 1 \right]}_{\text{car } a+2 \neq 1.}$

$\left(5(a+2) \frac{1-(a+2)^n}{1-(a+2)} \right)$

2] $U_n = f(n)$

$u_{4n} = 1$
$u_{4n+1} = 0$
$u_{4n+2} = -1$
$u_{4n+3} = 0$

} (U_n) est 1 suite périodique non monotone

$U_{4n} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ suite extraite sans limite

donc U_n n'a pas de limite - 1

3] $U_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $V_n = U_n + \frac{1}{n}$

a] $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (U_n) est croissante

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n(n+1)^2} \left(n + n(n+1) - (n+1)^2 \right)$

$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ donc (V_n) est décroissante

$v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim v_n - u_n = 0$.

(v_n) et (u_n) sont adjacentes.

3) donc convergentes vers la même limite

7)

Soient $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ des réels/

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$$

$$\Rightarrow f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0_F$$

$$\Rightarrow \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \ker f$$

or $(e_1, \dots e_p)$ base de $\ker f$ donc il existerait $\lambda_1, \dots \lambda_p$ scalaires/

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$$

$$\Rightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \dots - \lambda_n e_n = 0_E$$

$\Rightarrow$

or $(e_1, \dots e_n)$ base de E

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dots \lambda_p = 0 \\ -\lambda_{p+1} = \dots = -\lambda_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (f(e_{p+1}), \dots f(e_n))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

2). $\hat{c}$ $(e_1, \dots e_n)$ base de E

1er thm du cours

$$\text{Im} f = \text{vect}(f(e_1), \dots f(e_p), f(e_{p+1}), \dots f(e_n))$$

or $e_1, \dots e_p$ sont des vecteurs du noyau

donc

$$\text{Im} f = \text{vect}(f(e_{p+1}), \dots f(e_n))$$

, ainsi

$(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est 1 famille libre et génératrice du $\text{Im} f$

$\Rightarrow$ base de $\text{Im} f$

$\left.\begin{array}{l} \dim(\text{Im} f) = n-p \\ \text{or } \dim(\text{Ker} f) = p \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) = \dim E$