DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (6 points)

Déterminer si les fonctions$f$ suivantes admettent une limite en a et la calculer si c'est le cas :

1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$ en $a = +\infty$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 1}}{(x - 1)}$ en $a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 + 1}$ en $a = +\infty$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{|2x + 6|}$ en $a = -3$

Exercice 2. (2.5 points)

Déterminer les réels x tels que :

1. $|x + 3| > -1$ et $|2x + 4| \leqslant 5$
2. $|x + 1| \leqslant 2$ ou $|2x - 3| \geqslant 1$

Exercice 3. (1.25 points)
Déterminer les points $M(x, y)$ du plan tels que $|x - 2y| \leqslant 1$: on représentera les solutions à l'aide d'un graphique.

Exercice 4. (2 points)

1. Quelle propriété sur f la propriété (P) suivante donne t'elle ? Représenter un exemple de fonction f vérifiant (P).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow |f(x) + 2| \leqslant \varepsilon$$

2. Donner la négation de la propriété (P).

Exercice 5. (2 points)

Considérons la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. f est elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui préciser son prolongement.

Exercice 6. (4 points)

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

1. f est elle continue en 0 ?
2. f est elle dérivable en 0 ?
3. f est elle $\mathcal{C}^1$ en 0 ?

Exercice 7. (2.25 points)

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer $f([2,4])$.
3. Donner le domaine de dérivabilité de f.
4. Calculer f' sur un domaine valable.
5. Calculer f'' sur un domaine valable.