DS 1 M 1.1 2023

Exercice 1 :

1) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{3x^2\left(1 - \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}} = 3$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x^2+1}}{x - 1} = 0$ F. I $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})}{(x-1)(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 - (x^2+1)}{(x-1)(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{(x-1)(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \to 1} \frac{-(1+x)}{(\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+1} = \frac{7x - 1}{\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{7x\left(1-\frac{1}{7x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

et $x > 0$ donc $|x| = x$

$$\lim_{+\infty} ③ = \frac{7}{2}$$

4) $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+4x+3}{|2x+6|}$$

$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

$$\frac{x^2+4x+3}{|2x+6|} = \frac{(x+3)(x+1)}{2|x+3|}$$

- si $x < -3$ $\quad |x+3| = -(x+3)$

et ④ $= -\frac{(x+1)}{2}$

$$\lim_{x \to -3^-} ④ = 1$$

$\neq$ pas de limite en -3

- si $x > -3$ $\quad |x+3| = (x+3)$

et $$\lim_{x \to -3^+} ④ = -1$$

Exercice 2 :

1) $|x+2| > -1$ et $|2x+4| \leq 5$.

1) une valeur absolue est tjs positive ou nulle
$|x+3| > -1$ est donc toujours vérifiée

$S_{(1)} = \mathbb{R}$

$|2x+a| \leq 5 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad -5 \leq 2x+a \leq 5$

$(2) \Leftrightarrow \quad -9 \leq 2x \leq 1$

$(2) \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right]$

(2) $S_2 = \left[-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$S = S_{(1)} \cap S_{(2)} = [-9/2, 1/2]$

2) $|x+1| \leq 2$ (2a) ou $|2x-3| \geq 1$ (2b)

(2a) $\Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$ ou (2b) $\Leftrightarrow 2x-3 \geq 1$ ou $2x-3 \leq -1$

$-3 \leq x \leq 1$ ou (2b) $\Leftrightarrow x \geq 2$ ou $x \leq 1$

(2a) $\Leftrightarrow$

$S_{(2a)} = [-3, 1]$ $\quad S_{(2b)} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

$S = S_{(2a)} \cup S_{(2b)}$

$=]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

Exercice 3 :

$|x-2y| \leq 1$. (1)

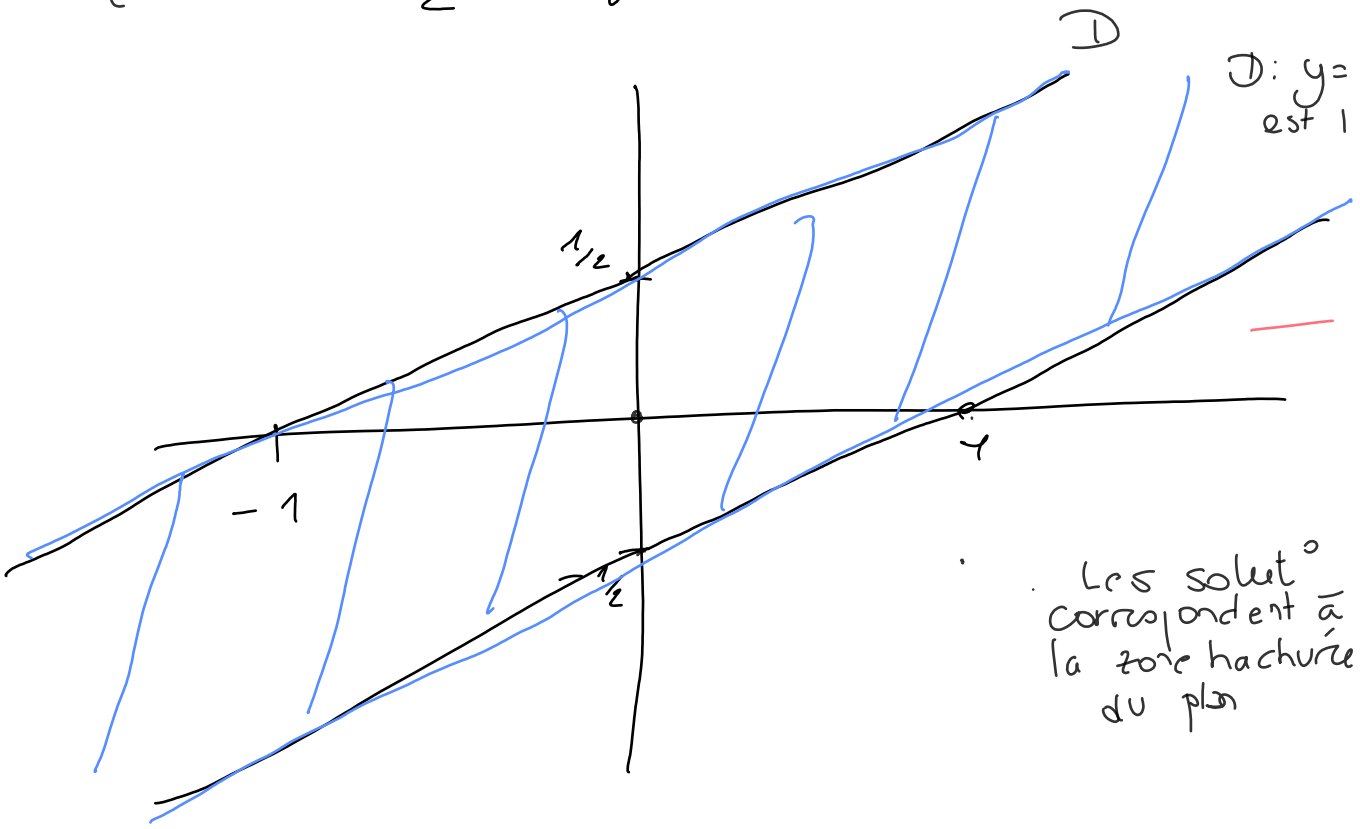
(1) $\Leftrightarrow \quad -1 \leq x-2y \leq 1$

(1) $\Leftrightarrow \quad -1-x \leq -2y \leq 1-x$

(1) $\Leftrightarrow \quad \frac{-1-x}{-2} \geq y \geq \frac{1-x}{-2}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\frac{x-1}{2} \leq y \leq \frac{1+x}{2}$

$\Delta : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est 1 droite



Les solut° correspondent à la zone hachurée du plan

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

1) Domaine de définition :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 1+2x > 0\}$

$= \{\ldots, x \neq 0 \text{ et } x > -\frac{1}{2}\}$

$D_f =]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[$.

2) Limite de f en 0 :

$\lim_0 f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

on pose $X = 2x$

$$f(x) = \frac{\ln(1+X)}{X/2} = 2 \cdot \frac{\ln(1+X)}{X}$$

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ car lorsque $\lim \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 2}$$

f est prolongeable par continuité en posant

non noté

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

$$f(x) \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{0} \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x \right)$

et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f est continue en 0.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ par le cours donc f dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

Exercice 7 :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$$

3) $u(x) = \sin(x^2) = \sin(v(x))$

$u'(x) = 2x \cos(x^2)$

pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2x\cos(x^2) \times x - \sin(x^2)}{x^2}$$

$$= 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0) \Rightarrow f$ C^1 en 0

1) $Df : \{ x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0 \}$ $\quad Df = [-1; +\infty[$

2)

3) la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 donc f est dérivable sur $]-1; +\infty[= I$

4) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$ sur I

5) $f''(x) = 2 - \frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$ sur I

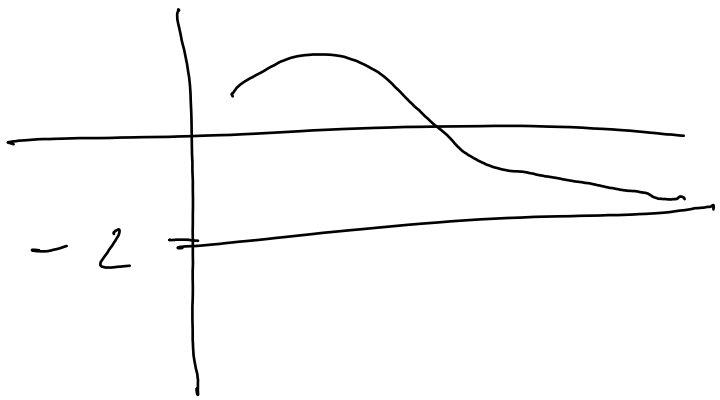
6) 2) f est continue croissante sur I donc $f([2,4]) = [f(2), f(4)]$

$= [4+\sqrt{3}, 16+\sqrt{5}]$

si tableau de variat° ss justificat : 0.25

globalement si réponse juste non justifiée 0.25

Exo 4 1) $(C) \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f = -2$



2) $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \ / \ x \geqslant A$ et

$|f(x)+z| > \varepsilon$