DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (7 points)

On définit

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \ln(x^2)}.$$

1. Soit $u(t) = t - \ln(t)$. Déterminer $\inf_{t\in]0,+\infty[} u(t)$.
2. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
3. Étudier la parité de la fonction f.
4. On note $D_+ = D \cap [0, +\infty[$, la partie du domaine de définition incluse dans $[0, +\infty[$. Déterminer f' puis établir le tableau de variations complet de f sur D_+, puis sur D tout entier.
5. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 2. (2,5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x - \pi) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{3}\tan(3x) > 1$.

Exercice 3. (2 point)

1. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$
2. Déterminer le domaine de $f(x)$ puis résoudre : $f(x) = \mathrm{sh}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) < 0$.

Exercice 4. (4,5 points)

1. Soit (E) : $2\dot{x} - 3x = 5 + \cos(3t) - 3\sin(3t)$.
   (a) Résoudre (E).
   (b) Déterminer la solution $x(t)$ de (E) vérifiant $x(0) = 1$.
2. Résoudre l'équation différentielle ci dessous

$$(E)\, y" + 16y = \cos(4x).$$

Exercice 5. (2,5 points)
Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$.

1. Donner le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente en 0 de f.
3. Donner $(df)_0$, la différentielle de f en 0.
4. Donner la valeur approchée à l'ordre 1 de $f(-0,1)$.

Exercice 6. (2 points)

1. Étudier la limite en 4 de la quantité $\dfrac{x^2 - \sqrt{x} - 14}{x - 4}$.
2. Trouver la limite en 0 de $\dfrac{\sin(2x)}{\exp(x) - 1}$.