DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (1,5 points)
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
Résoudre l'équation suivante : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^2 + y$

Exercice 2. (3 points)
Soit f et g deux fonctions de classe C^2 tels que $f(x,y) = g(x^2+y, xy)$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de g, x et y.
2. Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de g, x et y.

Exercice 3. (4 points)
Soit f la fonction à 2 variables réelles définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|}$

1. Donner le domaine de définition de f, noté I
2. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = f(x,y)$ pour $(x,y) \in I$ et $g(0,0) = 0$.

(a) g est elle continue en (0,0) ?
(b) g est elle différentiable en (0,0) ?
(c) Sans calcul, peut-on affirmer que g est de classe C^1 en (0,0) ?

Exercice 4. (2,5 points)
Soit V le volume d'un parallélépipède rectangle de largeur a, de longueur b et de hauteur a.

1. Déterminer à l'aide d'une différentielle une approximation de la variation de V lorsque les dimensions augmentent de 0,1.
2. Expliquer pourquoi la différentielle peut être considérée comme une approximation de la variation de V.

Exercice 5. (1,5 points)
Le plan tangent à la surface d'équation $z = 2xy + y^2$ au point de coordonnée (1,1,3) est il parallèle au plan d'équation $2x - 5y + 2z = 2$?

Exercice 6. (1,5 points)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\vec{u}$ le gradient de f au point M(1,2).Soit C la ligne de niveau d'équation $y + x^2 = 3$.
Peut-on avoir $\vec{u} = (1, 1)$?

Exercice 7. (2 points)
Linéariser et donner une primitive de $\sin^4 x$

Exercice 8. (4 points)
Soit $z = \dfrac{1}{1 + i\tan\theta}$ pour $\theta \in [0; 2\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$
Question préliminaire : montrer que $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ pour $\theta \in [0; 2\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$
Partie A

1. Donner la forme algébrique de z
2. En déduire le module et un argument de z.
   On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de θ.

Partie B
On pose $z_1 = 1 + i\tan\theta$

1. Donner le module et un argument de z_1 sans utiliser la partie A.
2. Retrouver le résultat de la question 2) de la partie A pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$