M2.2 DS 2. 2021

Exercice 1 :

$u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc

(u, v, w) est une base de E.

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

4) P^{-1} : matrice de passage de B' vers B

5)

(a) $\det A = 0$ donc f n'est pas un automorphisme

(b) $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}$

(c) $f(u)$: dans B : $A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{vmatrix}_B$

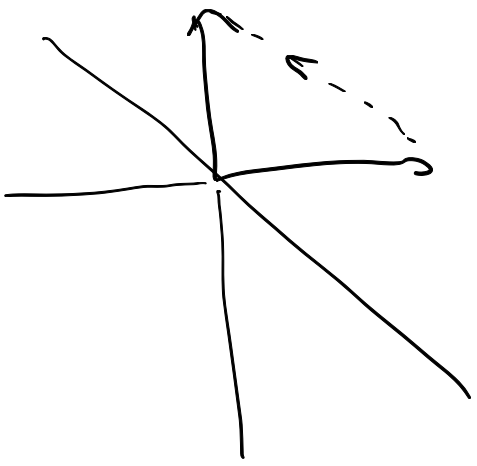
dans B' : $P^{-1} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}_{B'}$

(d) $D = P^{-1} A P \Rightarrow A = P D P^{-1}$

(e) $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = P D^n P^{-1}$

Exercice 2 :



$p(\vec{i}) = \vec{j}$

$p(\vec{j}) = \vec{j}$

$y = -x$

$\text{Mat}_B\, p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1) $A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = 2 \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

J est donc 1 matrice nilpotente d'ordre 3

2) $A^n = (2I + J)^n = (J + 2I)^n$

or $IJ = JI$

Donc par le binôme

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0} J^0 (2I)^n + \binom{n}{1} J (2I)^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 (2I)^{n-2}$$

car $J^k = 0$ pour $k \geq 3$

$$= 2^n I + 2^{n-1} \cdot n J + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} \cdot n & \frac{2^{n-2}\, n(n-1)}{2} \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} \cdot n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = b \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2$ si $a \neq 2$

$\operatorname{rg} A = 1$ si $a = 2$.

$a \neq 2$: Sous système de rang 2 :

$$\begin{cases} ax + z = b - 2y \\ 2x + z = 2 - ay \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = a - 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b-2y & 1 \\ 2-ay & 1 \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{b-2y-(2-ay)}{a-2} = \frac{b-2+(a-2)y}{a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b-2y \\ 2 & 2-ay \end{vmatrix}}{a-2} = \frac{2a - a^2y - 2b + 4y}{a-2}$$

Solution : $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{vmatrix} b-2 \\ 0 \\ 2a-2b \end{vmatrix}$ (1) $+ \; y \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4-a^2}{a-2} \end{vmatrix}$ (2)

Droite affine passant par le pt (1) de vecteur directeur (2).

si $a = 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = b \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

si $b \neq 2$: pas de solutions.

si $b = 2$: $2x + 2y + z = 2$ est solution - plan de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5 :

1) $(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad]-1;+\infty[$

equation linéaire :

$$y' + \frac{1}{1+x}\,y = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$$

$a(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad A(x) = \ln \underbrace{|1+x|}_{>0} = \ln(1+x)$

$y_H = K e^{-\ln(1+x)} = \frac{K}{1+x}$

Solution particulière : sous la forme $y_p = \frac{K(x)}{1+x}$

$$\Rightarrow \frac{K'}{1+x} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} \qquad K' = \frac{1}{1+x^2} \qquad K = \arctan x$$

$$y_p = \frac{\arctan x}{1+x}$$

Solution complète $y = y_p + y_{ht} = \frac{1}{1+x}(\arctan x + K)$

2) $y' x^2 - 2xy + y^2 = 0 \qquad I =]0; +\infty[$.

équation homogène.

$$y' - 2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

or $z = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = z'x + z$

(E) $\Rightarrow$ $x z' + z - 2z + z^2 = 0$

E) $\Rightarrow$ $x z' - z + z^2 = 0$

E) $\Rightarrow$ $x z' = -z^2 + z$

E) $\Rightarrow$ $\frac{z'}{z - z^2} = \frac{1}{x}$

E) $\Rightarrow$ $\frac{z'}{z} + \frac{z'}{1-z} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\ln|z| - \ln|1-z| = \ln x$ (car $x > 0$)

$\Rightarrow$ $\ln\left|\frac{z}{1-z}\right| = \ln x \Rightarrow \frac{z}{1-z} = Cx$ $\Rightarrow$

$C \in \mathbb{R}$

$z = \frac{Cx}{1+Cx}$

3) $(t+1)\frac{dh}{dt} = (t^2+2)\sqrt{h} \qquad h(0) = H \qquad I =]-1; +\infty[$

équations à variables séparables :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{t^2+2}{t+1}\,dt$$

t^2+2 | $t+1$

$-(t^2+t)$ | $t-1$

$-t+2$

$-(-t-1)$

3

$$\frac{dh}{h^{3/2}} = t - 1 + \frac{1}{t+1}\,dt$$

donc $-2\,h^{-\frac{1}{2}} = \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) + K \qquad K \in \mathbb{R}$.

conditions initiales : $h(0) = H$.

$$\boxed{\frac{-2}{\sqrt{H}} = K}$$

$$h(t) = \frac{4}{\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) + K\right)^2}$$

Exercice 6 :

$$T \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} - t + 1 \\ y(t) = \frac{t^2}{2} - t + 2 \end{cases}$$

1) $x'(t) = t^2 - 1$

$y'(t) = t - 1$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	$5/3$	↘	$1/3$	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$3/2$	↘	2	↗	$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	

2) point stationnaire pour $t = 1$

$f(1) = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 3/2 \end{vmatrix}$ $\quad f'(1) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad f''(1) = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad f^{(3)}(t) = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$

$x''(t) = 2t$ $\quad x^{(3)}(t) = 2$ $\quad p = 2$

$y''(t) = 1$ $\quad y^{(3)}(t) = 0$ $\quad q = 3$

point de rebroussement de 1ère espèce en 1

3) branche infinie :

$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{t^3}{3}} = 0$ branche parabolique de direction O_x

4)

