DS 2 M 1.1 2021

Exercice 1 :

$$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ par croissance comparée $\quad \lim\limits_{+\infty} 2e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

$\lim\limits_{-\infty} x^2 + 2 = +\infty \quad \lim\limits_{-\infty} e^{-x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

3) en $+\infty$: asymptote horizontale $y = 0$

en $-\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)e^{-x} \qquad \lim_{-\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} \frac{x^2+2}{x} = \lim_{-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{-\infty} x = -\infty$$

donc $\lim \frac{f(x)}{x} = -\infty$

branche parabolique de direction Oy.

4) $f'(x) = (2x - x^2 - r)e^{-x}$

du signe de $P = -x^2 + 2x - r$.

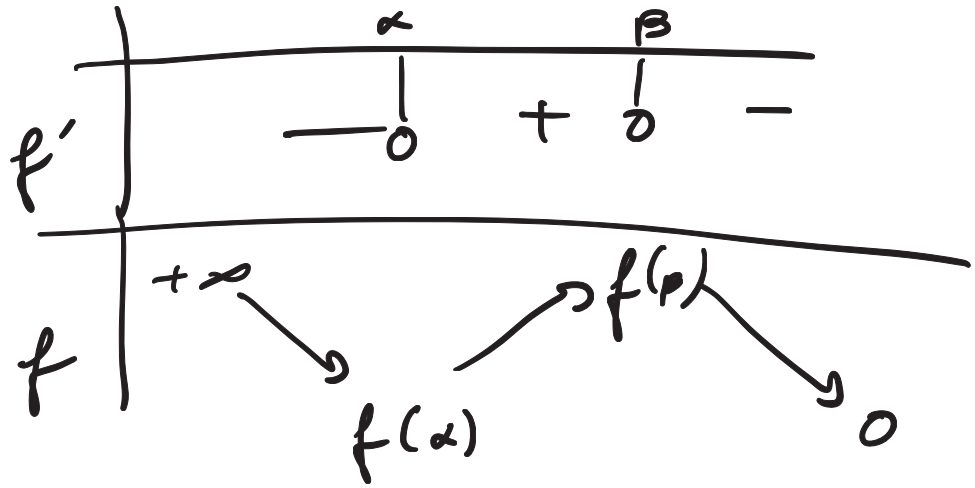
$\Delta = 4 - 4r = 4(1-r)$

si $r \geq 1$ $\Delta \leq 0$ et $P \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

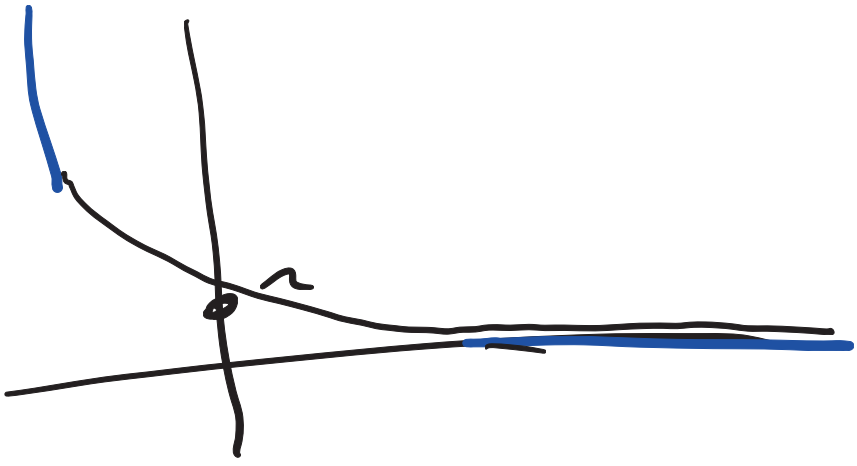
f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

si $r < 1$: $\Delta > 0$ 2 racines

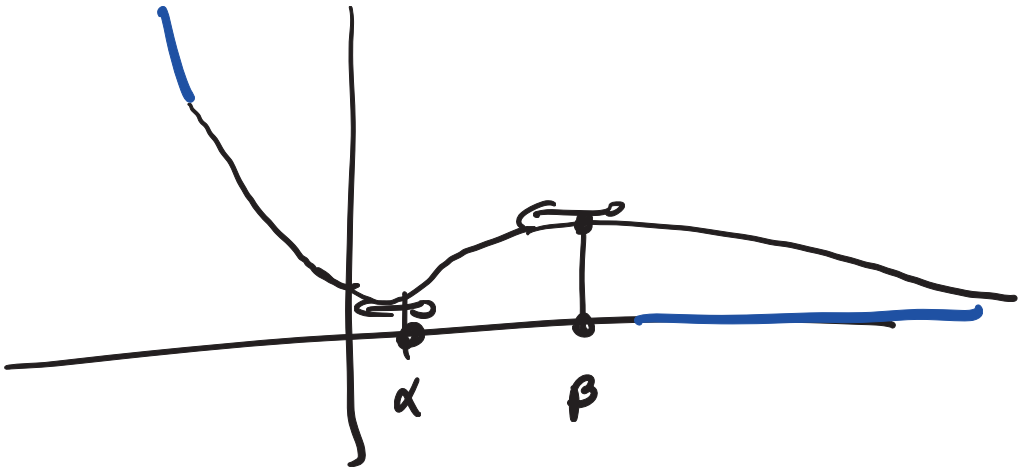
$\alpha = 1 - \sqrt{1-r}$ et $\beta = 1 + \sqrt{1-r}$



$r \geq 1$:



$r < 1$



Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{2}{x+3} - 4$$

1) $g(x) = 2f(x+3) - 4$

2] $f(x) \xrightarrow{\text{Translation de 3 vers la gauche}} f(x+3) \xrightarrow{\text{dilatation verticale de facteur 2}} 2f(x+3)$

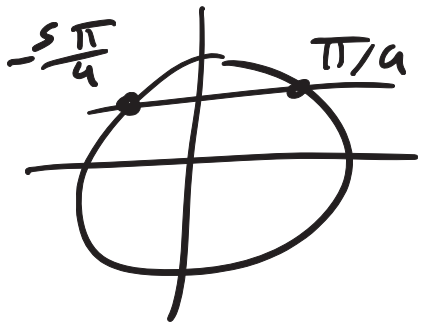
$\xrightarrow{\text{translation vers le bas de 4}} 2f(x+3) - 4$

Exercice 3 :

1) $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

2) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$-\frac{5\pi}{4} \leq -x \leq \pi/4 \quad [2\pi]$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Exercice 4 :

$$ch(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

$$ch^2(x) + sh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{2x} + 2e^{-2x}\right)$$

$$= ch(2x)$$

Exercice 6 :

1) $y'' + 9y = x^2 + 1$

Solution de l'équation homogène :

Ec : $r^2 + 9 = 0 \qquad \Delta = -4 \times 9$

$$r_1 = \pm 3i$$

$$y_H = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{0x}$$
$$= A\cos 3x + B\sin 3x$$

2) Solution particulière :

9	$y_p = ax^2 + bx + c$
0	$y'_p = 2ax + b$
1	$y''_p = 2a$

$$9ax^2 + 9bx + 9c + 2a$$

par identification $9a = 1$ $\quad a = \frac{1}{9}$

$9b = 0$ $\quad b = 0$

$9c + 2a = 1$ $\quad c = \frac{7}{81}$

$$y_p = \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{81}$$

Solution complète

$$y = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{81}$$

$$y(0) = 1 \iff A + \frac{7}{81} = 1$$

$$A = \frac{74}{81}$$

$$y' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x + \frac{2}{9}x$$

$$y'(0) = 0 \iff 3B = 0$$

$$B = 0$$

Solution avec C.I : $y = \frac{-7}{81}\cos 3x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{81}$

Exercice 7 :

$v(t) = \text{sh}(t^2)$

3) $y_H = C\cos(3x+\phi)$ $\quad C = \sqrt{A^2+B^2}$ $\quad \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$

1) $d_{t_0} v(h) = v'(t_0)\,h = 2t_0\,\text{ch}(t_0^2).\,h$

on dx à la place de h.

2) $d_{t_0} v(h) \approx \Delta v = v(t_0+h) - v(t_0)$

Exercice 5 :

$$y' + y = e^{-x} \quad (1)$$

1) $g(x) = x\,e^{-x}$

$g'(x) = -x\,e^{-x} + e^{-x}$

$g' + g = e^{-x}$ donc g est solution de (1)

2) $y_H = K e^{-x}$ $\quad y_P = g$

solution complète $y = (K + x)\,e^{-x}$

3) On est dans le cas où y_P de la forme $(Ax+B)\,e^{-x}$ — 1 solution double

Ec : $(r+1)^2 = r^2 + 2r + 1$

$$y'' + 2y' + y = 0$$