DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4,5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \log(5x + 100)$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Calculer la dérivée de f.

(c) Calculer et simplifier $f(20)$.

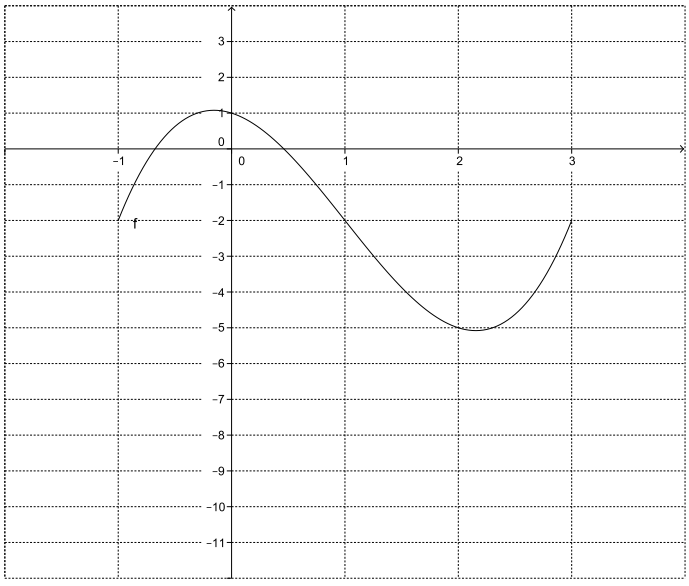
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x)}$

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 3}$

   Étudier les branches infinies de f.

Exercice 2. (2 points)
Soit f dont la représentation graphique est donnée par la courbe suivante :



Tracer les représentations graphiques des fonctions g et h définies par $g(x) = f(x + 1)$ et $h(x) = f(2x)$ sur la graphique ci-dessus.

Exercice 3. (3 points)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \tan(2x)$
   Déterminer la plus petite période de f.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) \geqslant \frac{-1}{2}$
3. Résoudre sur $[-\pi, \pi[$, $\cos(x) + \cos(3x) = 0$

Exercice 4. (4,5 points)

Parmi les équations suivantes, identifier les équations linéaires et résoudre les équations linéaires.

1. $y" + 6y = -5y'$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
2. $y'' + 9y = \cos(3u)$
3. $x - 2\dot{x} = t^2 + 2$
4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3(\frac{dx}{dt})^2 = 2x$

Exercice 5. (1,5 points)

On considère l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec a un réel : $y' + ay = 0$ (H).

1. Montrer que les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax}$ sont des solutions de l'équation différentielle (H).
2. Pourquoi est il faux d'écrire " Montrer que les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax}$ sont **les** solutions de l'équation différentielle (H)." ?
3. On introduit la fonction g telle que $g(x) = f(x)e^{ax}$ avec f une solution de l'équation $y' + ay = 0$. Déterminer g, en déduire f et conclure.

Exercice 6. (5 points)

Soit a un réel. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + a}$.

1. Donner le domaine de définition de f en distinguant tous les cas suivant les valeurs de a.
2. Dresser le tableau de variation de f en distinguant tous les cas suivant les valeurs de a.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition en distinguant tous les cas suivant les valeurs de a.
4. Étudier les éventuelles branches infinies dans les différents cas.
5. Donner l'allure de la courbe dans les différents cas.