DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (6.5 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x^2 + r)e^{-x}$$

avec r un réel,

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner les limites aux bornes du domaine de définition de f.
3. Déterminer les branches infinies.
4. Dresser le tableau de variations sans calculer l'image des extremums(on distinguera plusieurs cas en fonction de r).
5. Donner l'allure de la représentation de f dans chacun des cas précédents.

Exercice 2. (2 points)

Considérons les deux fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{2}{x+3} - 4$$

1. Exprimer g en fonction de f.
2. Par quelle succession de transformations élémentaires peut on passer de la représentation graphique de f à celle de g. On justifiera l'ordre dans lequel on applique les transformations.

Exercice 3. (2.5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(-x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4. (1 point)

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$$

Exercice 5. (3.5 points)

On considère l'équation différentielle (1) $y' + y = e^{-x}$

1. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation (1).
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle (1).
3. Déterminer une équation différentielle du second ordre homogène appelée E, telle que les solutions de (1) soient solutions de E.

Exercice 6. (3 points)

1. Résoudre l'équation différentielle E

$$y" + 9y = x^2 + 1$$

2. Déterminer la solution f de E satisfaisant les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
3. Écrire la solution homogène de l'équation précédente E avec un seul terme.

Exercice 7. (1.5 points)

Soit $u(t) = \text{sh}(t^2)$

1. Calculer la différentielle de u en t_0.
2. Comment interpréter en physique cette différentielle ?