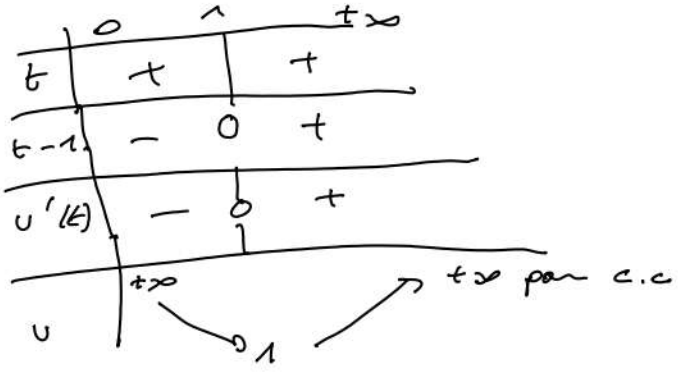
DS 2 M11 2026-2027

Exercice 1 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \ln(x^2)}$$

1] $v(t) = t - \ln t$

$$v'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$



donc par lecture du tableau de variation

$$\inf_{\mathbb{R}_{+}^{*}} v = 1$$

2] Domaine de définition : il faut $x^2 > 0$ (pour $\ln(x^2)$)
donc $x \neq 0$.

et $v(x^2) \neq 0$ pour $\frac{1}{v(x^2)}$ et d'après 1] c'est vrai pour

tout $x \in \mathbb{R}^*$

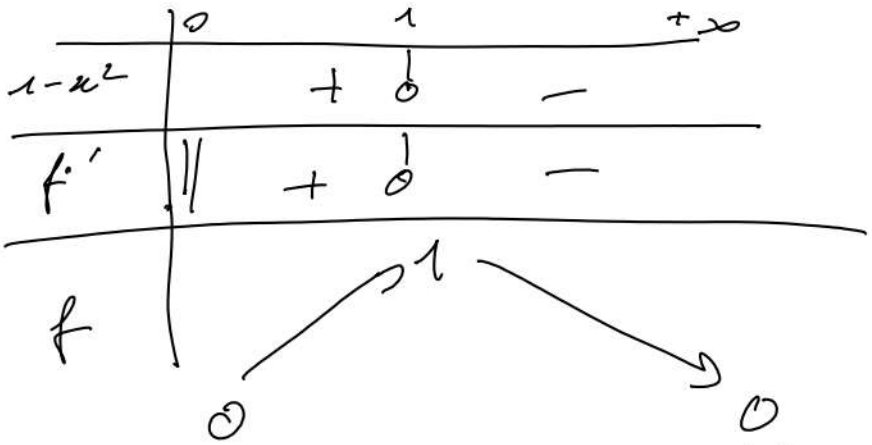
Donc $Df = \mathbb{R}^*$

3] $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - \ln((-x)^2)} = f(x)$ f est paire.

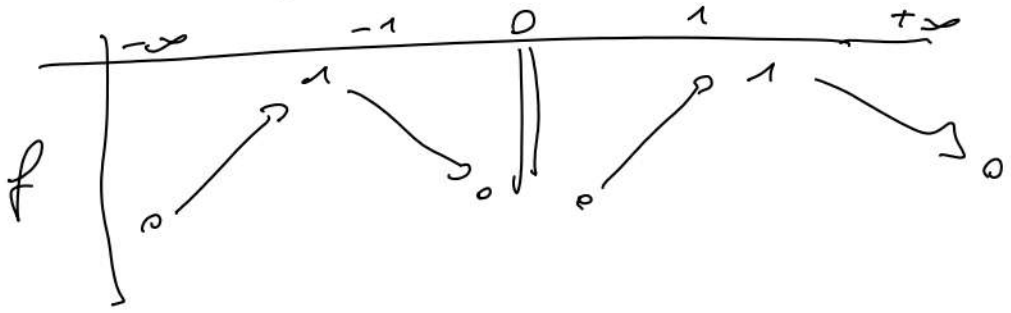
4] Etude sur $D^+ =]0; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{2x - \frac{2}{x}}{\left(x^2 - \ln(x^2)\right)^2}$$

$$= \frac{2(-x^2+1)}{x\left(x^2 - \ln(x^2)\right)^2}$$ du signe de $1 - x^2$



par symétrie d'axe Oy on obtient le tableau



5) $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 0$ donc $\lim\limits_{0} f = 0$

on prolonge par continuité f sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=0$

Enoncé : précision dérivable en 0

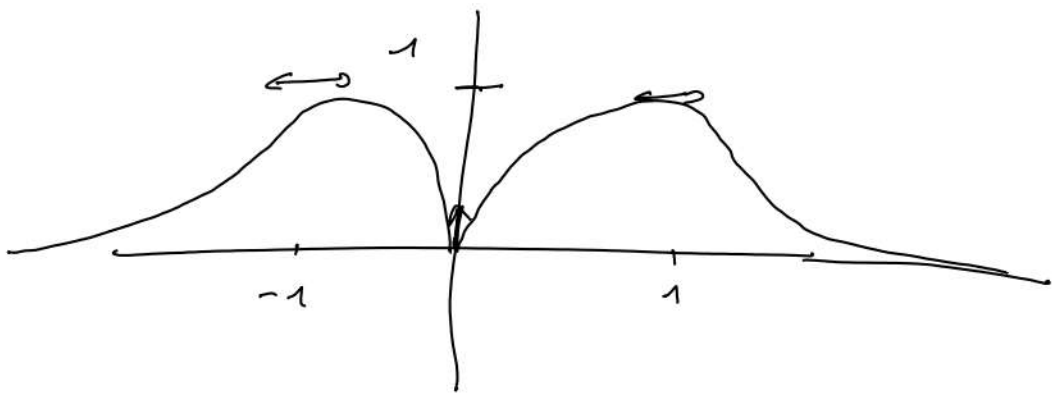
en 0 : taux d'accroissement : $\tau(h) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\tau(x) = \frac{1}{x(x^2 - \ln(x^2)} = \frac{1}{x^3 - x\ln(x^2)}$$

et $x^3 - x\ln(x^2) \underset{0}{\sim} x^3$ donc $\lim\limits_{0^\pm} \tau(x) = \pm\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

6)



Exercice 2 :

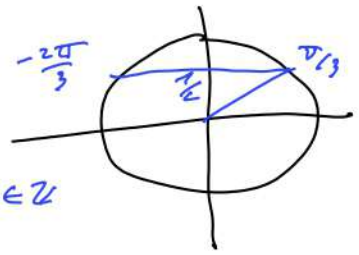
1) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans $[0, 2\pi[$: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$

$\frac{11\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$

2) $\sin(x - \pi) \leq \frac{1}{2}$

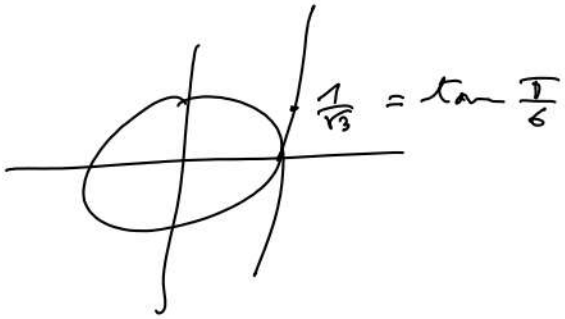


$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

3) $\sqrt{3}\tan(3x) > 1$

$\tan 3x > \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\frac{\pi}{6} + k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 3 :

1) $ch^2 x - sh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\right) = \frac{4}{4} = 1$

2)

$$f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) < 0 \qquad (1)$$

sh u est du même signe que u.

donc $(1) \iff \dfrac{2x+1}{x-1} < 0$

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$$S = \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$$

Exercice 4 :

1) $2\dot{x} - 3x = 5 + \cos 3t - 3\sin 3t$

Solution de l'équation homogène :

(H) : $\dot{x} - \frac{3}{2}x = 0 \qquad x_H = Ae^{+\frac{3}{2}t}$

Solution particulière $2\dot{x} - 3x = b(x)$

pour $b(x) = 5$: $\quad x_p = -\frac{5}{3}$

pour $b(x) = \cos 3t - 3\sin 3t$:

-3	$x_p = a\cos 3t + b\sin 3t$	
2	$\dot{x}_p = 3b\cos 3t - 3a\cos 3t$	
$2\dot{x} - 3x$	$= (6b - 3a)\cos 3t + (-6a - 3b)\sin 3t$	

par identification on veut $\begin{cases} -3a + 6b = 1 \\ -6a - 3b = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a+6b=1 \\ -15b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a=-1 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$ donc $x_p = \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin(3t)$ est solution

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Solution complète : $x = Ae^{\frac{3}{2}t} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$, $A \in \mathbb{R}$

si $x(0)=1$: $x(0) = 1 = A - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}$, $A = \frac{7}{3}$

donc $x(t) = \frac{7}{3}e^{\frac{3}{2}t} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$

2) $y'' + 16y = \cos(4t)$

Solution de H : $r^2 + 16 = 0 \quad r = \pm 4i$

$y_H = A\cos(4x) + B\sin(4x)$

Solution particulière :

16	$y_p = x\underbrace{(a\cos(4x) + b\sin 4x)}_{y_H}$
0	$y'_p = x(y'_H) + y_H$
1	$y''_p = x(y''_H) + 2y'_H$

$y''_p + 16y_p = x\underbrace{(y''_H + 16y_H)}_{0} + 2y'_H$.

$= 8b\cos(4x) - 8a\sin(4x)$

par identification on a $b = \frac{1}{8}$ $a = 0$

Ainsi $y_p = \frac{1}{8}x\sin 4x$

Solution complète $y = A\cos 4x + B\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 4x$

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$$

1] $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $x \in]-1;+\infty[$

$\frac{1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $(x^2+1) > 0$.

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 2x\cdot\sqrt{x+1}}{(x^2+1)^2}$$

2] équation de la tangente :

$$y = f'(0)\,x + f(0)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

3] $df_0(h) = f'(0)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot h$

4] $f(-0,1) - f(0) \approx df_0(-0,1)$

$$f(-0,1) \approx f(0) + df_0(-0,1) = 1 - 0,05 = 0,995$$

Exercice 6 :

1] $\lim\limits_{4} \dfrac{x^2 - \sqrt{x} - 14}{x - 4} = \lim\limits_{4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$

avec $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $\lim \textcircled{*} = 8 - \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$

2)

$$\frac{\sin 2x}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{0} (2) = 2$$