DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°3

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (-3-4i)z + 5i - 1 = 0$.
2. Montrer que $z^3 + (-3-2i)z^2 + (-i+7)z - 10 - 2i = 0$ admet une solution imaginaire.
3. En déduire les solutions de $z^3 + (-3-2i)z^2 + (-i+7)z - 10 - 2i = 0$ dans $\mathbb{C}$

Exercice 2. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 = 1$$

On ne cherchera pas à mettre les solutions sous forme algébrique.

Exercice 3. (2,5 points)
Soit D l'aire comprise entre les courbes d'équation $y = \sin(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$ et l'axe des abscisses,

1. Dessiner D.
2. Calculer $\int\int_D y dx dy$.

Exercice 4. (2,5 points)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ avec a et b positifs calculer l'intégrale :

$$\int\int_D 2x dx dy$$

en posant $x = ar\cos(\theta)$ et $y = br\sin(\theta)$

Exercice 5. (6 points)
Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ? Lorsqu'elles sont bijectives déterminer leur fonction réciproque.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto xy+6 \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x^2, -x) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (2x+y, x-2y) \end{cases}$

Exercice 6. (3 points)
Soit la fonction suivante $f : \begin{cases} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$

1. f est elle bijective ?
2. Déterminer $f([0;2])$.
3. Déterminer $f^{-1}([0;\frac{1}{4}])$.
