DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°3

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4 points)
Soit D la surface du plan délimitée par les points de coordonnées $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$ et $D(2;0)$.

1. Faire un dessin.
2. Vérifier que $\dfrac{x^2}{2x+1} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2x+1}$.
3. Calculer $\displaystyle\int\int_D \frac{x}{y+1} dxdy$.

Exercice 2. (2 points)
Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^2$ et D un domaine de $\mathbb{R}^2$ tels que
$\displaystyle\int\int_D f ds = \int_2^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} r^3 d\theta dr$ en polaire.

1. Déterminer D et f.
2. Calculer l'intégrale.

Exercice 3. (3 points)
Calculer $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leqslant xy \leqslant b, 0 \leqslant y^2 - x^2 \leqslant 1\}$ avec $a > 0$ et $f(x,y) = (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$.
On posera $u = xy$ et $v = y^2 - x^2$ et on admettra que pour tout $\alpha > 0$, $0^\alpha = 0$.

Exercice 4. (3 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x \ln x$.

1. Déterminer $f([\dfrac{1}{2e}; 1])$.
2. Déterminer $f^{-1}(]-\infty; 0])$.

Exercice 5. (2 point)
Soit f une application de E dans F. A et B deux sous ensemble de E.
Démontrer que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
On rappelle que $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$.

Exercice 6. (3 points)
Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ? Lorsqu'elles sont bijectives déterminer leur fonction réciproque.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y; x-4y) \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto xe^y \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (2x+1; 4x+2) \end{cases}$

Exercice 7. (3 points)
Soit f la fonction réelle $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2} \end{cases}$

1. Donner le domaine de définition de f, noté E.
2. Déterminer F tel que f soit une bijection.
3. Déterminer f^{-1}.