Contrôle 3 M2.2.

Exercice 1 :

1) Si $m \notin \{0, 4\}$

$\det A \neq 0$ et on a un système de Cramer.

$$x = \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ m-1 & m & m-1 \end{vmatrix} \times \frac{1}{-m^2(m-4)}$$

$$y = \begin{vmatrix} m-1 & m+1 & 1 \\ m & 3 & 3 \\ m+1 & m-1 & m-2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{-m^2(m-4)}$$

$$z = \begin{vmatrix} m-1 & m & m+1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} \times \frac{1}{-m^2(m-4)}$$

Si $m = 0$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A < 3$

non colinéaire donc $\operatorname{rg} A \geq 2$

$\operatorname{rg} A = 2$ prenons x, y est inconnue principale dans les 2 premières lignes.

$$\begin{cases} -x = m+1 = 1-y \\ 2y = 3-3z \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3-3x}{2} \\ x = -1+z \end{cases}$$

Vérification :

$$-1+z-z = -1 \quad \text{ok}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3/2 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est une droite passant par $(-1, \frac{3}{2}, 0)$ de Vecteur directeur $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $m = 4$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \operatorname{rg} A = 2.$$

$$\begin{cases} L_1 & 3x + 4y = 5 - z \\ L_2 & 4x + 2y = 3 - 3z \end{cases}$$

$L_1 - 2L_2 : -5x = -1 + 5z$

$x = \frac{1}{5} - z$

$$\rightarrow 2y = 3 - 3z - \frac{4}{5} + 4z = \frac{11}{5} + z$$

$$y = \frac{11}{10} + \frac{z}{2}$$

Vérification :

$$1 - 5z + \frac{22}{5} + 2z + 3z = 4$$

$\frac{27}{5} = 4$ non

Donc pas de solution pour $m = 4$

Exercice 2 : (3,5)

$$(1+x)y' + 2y = (1+x)e^x \quad (2)$$

2) $\Rightarrow$ $y' + \frac{1}{x+1} y = e^x \qquad x > -1$

- Solution de l'équation homogène

$y_H(x) = ke^{-A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$

avec $a(x) = \frac{1}{x+1}$

$A(x) = \ln|x+1| = \ln(x+1)$

donc $y_H(x) = \frac{k}{x+1}$ $k \in \mathbb{R}$

- Recherche d'une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)\, e^{A(x)}$ $\Rightarrow$

$y_p'(x) = k'(x)e^{-A(x)} + k(x)(-a(x))e^{-A(x)}$

or $y_p' + a(x) y_p = b(x)$

$\Rightarrow$ $k'(x) e^{-A(x)} = b(x)$

$\Rightarrow$ $\frac{k'(x)}{x+1} = e^x$

$\Rightarrow$ $k'(x) = e^x(x+1)$

procédons par ipp pour déterminer k' :

$u'(x) = e^x$ $\quad v(x) = x+1$

$u(x) = e^x$ $\quad v'(x) = 1$

$\Rightarrow \int k'(x)\,dx = [e^x(x+1)] - \int e^x dx$

$\Rightarrow$ pour $k(x) = e^x(x+1) - e^x = xe^x$

donc $y_p(x) = \frac{xe^x}{1+x}$

- Solution générale : $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$= \frac{k + xe^x}{x+1}$ $k \in \mathbb{R}$, $x > -1$

Exercice 3 :

$y'y^2 = x$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{3}y^3 = \frac{x^2}{2} + k$ $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 3k$ $k \in \mathbb{R}$

3) $y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}$ équation ho

Soit $y = zx$ $\qquad y' = z + xz'$

$z + xz' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2$

$xz' = \frac{1}{2}(1-z)^2$

$\frac{z'}{1-z^2} = \frac{1}{2x}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\ln|x| + k$

$= \frac{1}{2}\ln x + k$ car $x > 0$

[illegible] $= \frac{1}{2}$ [illegible] $+ k$

[illegible] $= \frac{1}{2}$ [illegible] $+ k$ $\qquad k \in$

$\frac{1}{\ln\sqrt{x} + k} = 1 - \frac{y}{x}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = x\left(1 - \frac{1}{\ln\sqrt{x} + k}\right)$

Exercice 4 :

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, f une application continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f$

2) $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a$

$= \frac{1}{b-a}\left(b f(a) - f(b)a\right)$

$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} b$

$= \frac{1}{b-a}\left(-a f(b) + b f(a) = g(a)\right.$

on applique le th de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ / $g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

d'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 5 :

1) Si $y(a) = 0$ sur I y ne peut pas être solution de $y' = \frac{1+y^2}{y}$ donc $\forall x \in I$, $y(x) \neq 0$

$y \mapsto \frac{1+y^2}{y}$ est donc continue sur I.

Exercice 5 : (3,5)

1) Résolution de $y' = \frac{1+y^2}{y}$ (E)

E) $\Rightarrow yy' = 1+y^2$

$\Rightarrow \frac{yy'}{1+y^2} = 1$ car $1+y^2 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2yy'}{1+y^2} = 1$ équation à variables séparables

donc en primitivant

$E) \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = x + k \quad k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln(1+y^2) = 2x + 2k$

$\Rightarrow 1+y^2 = C.e^{2x} \quad C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y^2 = Ce^{2x} - 1.$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{Ce^{2x}-1}$ si c'est défini

2) a) $y' = f(t,y)$ avec $f : (t,y) \longrightarrow \frac{1+y^2}{y}$

f est C^1 sur $\mathbb{R} \times (]-\infty,0[\cup]0,+\infty[)$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

b) (J,φ) est solution maximale du problème (C) s'il n'existe pas d'intervalle K : $J \subsetneq K$ et tel que (K,φ) soit solution.

c) Comme f est C^1 sur $\mathbb{R} \times (]-\infty,0[\cup]0,+\infty[)$, elle est localement lipschitzienne par rapport à la 2ème variable donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (C) admet une unique solution maximale.

d) La condition initiale est $y(0) = 1$

or soit $y(0) = -\sqrt{C-1} = 1$ impossible

donc $y(0) = \sqrt{C-1} = 1 \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt{2e^{2x}-1}$

et $J = \{x \in \mathbb{R} / 2e^{2x}-1 > 0\} = \left]\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1}, +\infty\right[$

(car la fonction racine n'est pas dérivable en 0)

$\Rightarrow$ si intervalle

(J,y) est la solution maximale de (C).

mauvaise au pb de Cauchy.

Exercice 6 :

1) $n = 4 \quad p = 3$.

a) $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Soit le système $AX = B$ (1)

A mat$_{n \times n}$ et $\operatorname{rg} A < n$.

Soit f une application linéaire ayant A pour matrice alors

$\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} f = n$

donc $\dim \operatorname{Ker} f > 0$.

Soit X_0 une solution de (1)

et $X_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $X_1 \neq 0$.

alors $A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1$

$= B + 0$.

est solution du système il ne peut pas y avoir de solution unique.