DS 3 M2.2 2023

Exercice 1 :

1) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$

$\tilde{f} \circ \tilde{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{f} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ f = id$

- $M^2 = I$

- $\left.\begin{array}{l} f \circ f (i) = f(j) = i \\ f \circ f (j) = f(i) = j \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ f = id$

2) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on cherche $\mathcal{B}'(e_1, e_2)$ telle que.

$f(e_1) = e_1 \qquad f(e_2) = -e_2$.

Soit $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} e_1$

$\Leftrightarrow MX = X \iff \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \iff x = y \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $e_1 = i + j$

De même, soit $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} e_2$

$MX = -X \iff \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \iff y = -x$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $e_2 = i - j$

or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a 1 déterminant non nul $\Rightarrow$ c'est bien 1 base

3] en posant P la matrice de passage de B à B'

$P\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ on a donc $M' = P^{-1} M P$.

4] $M^{2023} = (M^2)^{1011} \cdot M = I \cdot M = M$.

ou $M^{2023} = (PM'P^{-1})^{2023} = PM'^{2023}P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} = M$

5] P^{-1} représente la matrice de passage de B' vers B.

6] $w = 2i + 3j \Rightarrow w\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}_B$

a) Coordonnées de Vf(w) dans B : $M\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$

b) Coordonnées de Vf(w) dans B' : $\mathrm{Mat}_{B'} f(w) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_B f(w)$

$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-5\\-1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}5\\1\end{vmatrix}$.

calcul de P^{-1} :

$\det P = -2$

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 2 : $M\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

1] Vecteurs : $u_1\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}_B$ $u_2\begin{vmatrix}7\\2\end{vmatrix}_B$ vecteurs non colinéaires famille libre.

ou

$T = \mathrm{Mat}_B(u_1, u_2)$

$\det T \neq 0$

conclu° : (u_1, u_2) base de $\mathbb{R}^2$

2) $M = Mat_B(f)$ avec $f(e_1) = 3e_1 + 4e_2$
$f(e_2) = 7e_1 + 2e_2$

$\det M \neq 0$

$\Leftrightarrow$ f est une bijection.
$\Rightarrow$ f automorphisme

Exercice 3 :

$\mathcal{L}_B$ en expression analytique.

$$\begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + my + 4z = 8 - m \\ -x - my + (m^2 - 3m - 2)z = 2m - 4 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & m & 4 \\ -1 & -m & (m^2 - 3m - 2) \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 4 \\ -m & (m^2 - 3m - 2) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & -m \end{vmatrix}$$

$$= m^3 - 3m^2 - 2m + 4m - 2m$$

$$= m^3 - 3m^2 \quad \text{ou par Sarrus}$$

$$= m^2(m-3)$$

Cas 1 : $m \neq 0$ ET $m \neq 3$ $\det A \neq 0$

le système est de Cramer et admet donc 1 unique solution (x_0, y_0, z_0)

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8-m & m & 4 \\ 2m-4 & -m & m^2-3m-2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8-m & 4 \\ -1 & 2m-4 & m^2-3m-2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -m & 8-m \\ -1 & m & 2m-4 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Il s'agit d'1 point de $\mathbb{R}^3$

cas 2: $m=0$

$$\begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + 4z = 8 \\ -x - 2z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2z = 4 \end{cases}$$

Il y a 1 infinité de solut.

$$S = \{(4-2z, y, z),\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(4,0,0) + y(0,1,0) + z(-2,0,1),\ \}$$

c'est le plan affine passant par $(4,0,0)$ et dirigé par les vecteurs $(0,1,0)$ et $(-2,0,1)$

Cas 3: $m=3$

$$(S)\begin{cases} x+2z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ -x-3y-2z=2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg\,S < 3$ et $(1,0,2)$ non colinéaire à $(2,3,4) \Rightarrow rg\,S = 2$

on prend $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de rg 2

$\det B = 3$

$\det B \neq 0$

on choisit donc x et y comme inconnues principales et z comme secondaire

on résout le système

$$\begin{cases} x = 4-2z \\ 2x+3y = 5-4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-2z \\ 8-4z+3y = 5-4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-2z \\ y = -1 \end{cases}$$

En réinjectant dans l'équation 3) on obtient

$$-4+2z+3-2z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 2$$

les équations ne sont pas compatibles

$$S = \emptyset .$$

Exercice 5 :

1) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$

. L'équat est déjà normalisée

. $y' + y = 0$

$a(x) = 1$

$A(x) = x$

$S_H = \{ x \longmapsto k e^{-x}, k \in \mathbb{R} \}$

Recherche d'1 solut particulière par la méthode de la variation de la cst :

$g(x) = k(x) e^{-A(x)} = k(x) e^{-x}$

$k' = b(x) e^{A(x)} = \frac{e^x}{1+e^x}$

avec $k(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$\Rightarrow k(x) = \ln|1+e^x| = \ln(1+e^x)$

$\Rightarrow g(x) = \ln(1+e^x) e^{-x}$

cel : $S = \{ x \longmapsto k e^{-x} + \ln(1+e^x) e^{-x} \}$

La solut/ $y(0) = 1 \iff k + \ln 2 = 1$

$\iff k = 1 - \ln 2$

2) $(x^2+3) y y' e^{-y^2} = 5x$

à variable séparable :

$y y' e^{-y^2} = \frac{5x}{x^2+3}$

$-\frac{1}{2} e^{-y^2} = \frac{5}{2} \ln \underbrace{(x^2+3)}_{>0} + K$

$$e^{-y^2} = -5\ln(x^2+3) + K_1$$

$$-y^2 = \ln\left(-5\ln(x^2+3)+K_1\right)$$

$$y = \pm\sqrt{-\ln\left(-5\ln(x^2+3)+K_1\right)}$$

3) $xy' = x\,e^{-2\frac{y}{x}} + y$

équation homogène : $y' = e^{-2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

on pose $z = \frac{y}{x}$ donc $y = xz$

si $\forall x \in I,\ x \neq 0$

$y' = xz' + z$

$$xz' + z = e^{-2z} + z$$

$$z'e^{2z} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2}e^{2z} = \ln|x| + K$$

$$e^{2z} = 2\ln|x| + K_1$$

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(2\ln|x| + K_1\right)$$

$$y = xz = \frac{x}{2}\ln\left(2\ln|x| + k_1\right)$$

Exercice 5 :

$$x\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - (y-2)(y'-1) = 0$$

si $x = \frac{1}{2}$ $\quad y(1/2) = 2$ ou $y'(1/2) = 1$

donc $\Pi\begin{pmatrix}1/2\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_y$ où le coeff directeur de la tangente en $x = 1/2$ vaut 1

avec $\mathcal{C}_y$ = courbe intégrale.