DS 1 . M2.2. 2022

Exercice 1 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+3y. \end{cases}$$

1] $u, v \in \mathbb{R}^2$ $\alpha \in \mathbb{R}$. $u \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $v \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

$$f(u+\alpha v) = f\begin{pmatrix} x+\alpha a \\ y+\alpha b \end{pmatrix} = x+\alpha a + 3(y+\alpha b)$$

$$= x+3y+\alpha(a+3b) = f(u)+\alpha f(v)$$

f est une application linéaire

2] $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+3y=0\}$ droite vectorielle.

$\neq \{0_E\}$ donc f n'est pas injective.

3] $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \ker f = 1$

et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

f est surjective.

Exercice 2 :

1] oui. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \longmapsto x$$

$\dim E = 3$

$\ker f = \{x=0\}$ plan de $\mathbb{R}^3$

$\dim \ker f = 2$.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\ker f = \{ x = 0 \text{ et } y = 0 \}$ droite de $\mathbb{R}^3$.

f n'est pas injective.

3] Non. si $\dim E' > \dim E \Rightarrow f$ non surjective.
or $\underbrace{rg(f)}_{=\dim E} \Rightarrow rg(f) < \dim E' \Rightarrow \mathrm{Im} f \subsetneq E'$

4] si $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f \leq 5$ par le thm du rang

Exercice 3 :

$rg(u,v,w) = \dim \mathrm{vect}(u,v,w)$ $u \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ $w \begin{pmatrix} -3 \\ a \end{pmatrix}$

$rg(u,v,w) \leq 2$ car 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ u,v non colinéaires donc $\underline{rg(u,v,w) = 2}$

Exercice 4 :

1) $s \circ s(x,y) = s(s(x,y))$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{x-y}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = (x,y) \\ \frac{\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{x-y}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

2) $(s + Id)(x,y) = s(x,y) + Id(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)+\frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}}+y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} x(1+\sqrt{2})+y \\ x+y(\sqrt{2}-1) \end{vmatrix}$$

3] $\underline{\text{Ker}(s+Id)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /$

$$\begin{cases} x(1+\sqrt{2})+y=0 \\ x+y(\sqrt{2}-1)=0 \end{cases} \begin{cases} y=-x(1+\sqrt{2}) \\ x-x(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=0 \end{cases}$$

$x-x=0$

$0=0$.

$\text{Ker}\, s+Id : \{x(1+\sqrt{2})+y=0\}$ droite de $\mathbb{R}^2$

$= \text{Vect} \begin{vmatrix} 1 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix}$

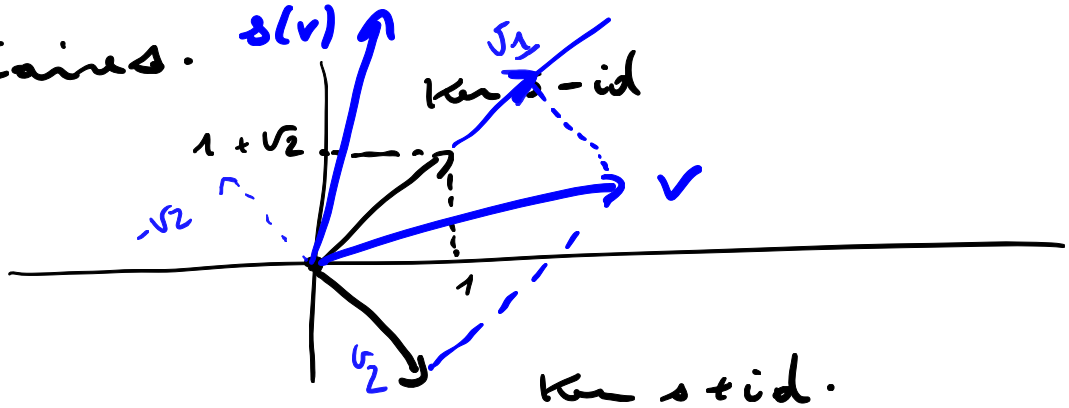
$\Rightarrow (x,y)-(x,y)$

4] $(s-Id)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} x(1-\sqrt{2})+y \\ x=y(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix}$

5] $\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (non colinéaire)

donc $\text{Ker}(s+id)$ et $\text{Ker}(s-id)$ sont supplémentaires.

6]



$v = v_1 + v_2$ $\quad v_1 \in \ker(s-id)$, $v_2 \in \ker(s+id)$

$\Rightarrow s(v) = s(v_1) + s(v_2)$

$= v_1 - v_2$

Exercice 5 :

$f : E \to E'$.

- $f(0_E) = 0_{E'}$ donc $0_{E'} \in \operatorname{Im} f$.
  (car $f \in \mathcal{L}(E, E')$)

- Soient $u, v \in \operatorname{Im} f$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

  $\exists\, a \in E \;/\; f(a) =$

  $b \in E \;/\; f(b) = v$. linéarité de f.

$$u + \alpha v = f(a) + \alpha f(b) = f(\underbrace{a + \alpha b}_{\in F})$$

donc $u + \alpha v \in \operatorname{Im} f$.

Exercice 6 :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ f \to af' + bf \end{cases}$$

Solution de l'équation $af' + bf = 0$

$\Leftrightarrow \ker \varphi$. donc il s'agit d'1 scv.

Exercice 7 :

1) Non $\quad u_n = 1 - \frac{1}{n}$. $\quad \lim u_n = 1$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$

u_n est strictement croissante qui tend vers 1.

4) $u_{n+1} = 0,2\, u_n$ $\quad u_0 = -3$

Suite géométrique. u_n est croiss
($q>0$ et $u_0<0$)

et lim $u_n = 0$ car $|q| < 1$