DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2.5 points)
Déterminer le module et un argument de z dans les cas suivants :

1. $z = (3 + 3\sqrt{3}i)^{10}$
2. $z = \dfrac{1}{-\cos(\theta) - i\sin(\theta)}$
3. $z = \dfrac{-j}{LR\omega}$ avec L, R, ω des constantes strictement positives.

Exercice 2. (2.5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2.

(a) $z^3 = 1 + i$

(b) En déduire les solutions complexes de $\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)^3 = 1 + i$ (on ne demande pas la forme algébrique des solutions).

Exercice 3. (2 points)

Linéariser avec les formules d'Euler

$$\cos(x)\sin^3(x)$$

puis donner une primitive de l'expression obtenue.

Exercice 4. (2,5 points) Calculer l'intégrale double suivante $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$, avec

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leqslant x \leqslant 3,\ y \geqslant 2, x + y \leqslant 5\right\}.$$

Exercice 5. (2 points)
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\}$.

1. Dessiner D.
2. En posant $x = r\cos(\theta) \quad y = 1 + r\sin(\theta)$ exprimer $\iint f(x,y)dxdy.$ pour $f(x,y)$ quelconque. (On attend le détail du calcul de $dxdy$ et les bornes de la nouvelle intégrale.)

Exercice 6. (3 points)

On se pose $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y + 3z \leqslant 1\}$.

1. Représenter D.
2. Calculer le volume de D à l'aide d'une intégrale triple.

Exercice 7. (2 points)

Soit ω la forme différentielle :

$$\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$$

1. Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(0,1)$ vers $B(1,2)$.

Exercice 8. (3.5 points)
Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, soit Γ son bord orienté dans le sens trigonométrique et ω la forme différentielle :

$$\omega = xy^2dx + 2xydy.$$

Calculer $\oint_\Gamma \omega$:

1. en utilisant un paramétrage de Γ.
2. en utilisant la formule de Green-Riemann.