DS 1 M 11

Exercice 1

1) (P) : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

non (P) : $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad y \neq x^2$

(P) est fausse car pour $y = -1 \quad y \neq x^2$

2) (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(b) non $\left(\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -4 \right)$

Exercice 2 :

3) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\sqrt{x^2-4}}$

• Domaine de définition : $x^2 - 4 > 0$

$x^2 > 4$

$x > 2$ ou $x < -2$

$D_f =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

• limite en -2 :

• ici $x < -2$ $\quad |x+2| = \sqrt{(x+2)^2}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

et $\lim\limits_{-2^-} f(x) = 0$

2)

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x^2-3}{-3x-1} - 1\right)$$

Domaine de définition :

$$\frac{2x^2-3}{-3x-1} - 1 > 0$$

$$\frac{2x^2-3+3x+1}{-3x-1} > 0$$

$$\frac{2x^2+3x-2}{-3x-1} > 0$$

$2x^2+3x-2$: $\Delta = 9 + 16 = 25$

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-3x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$Df =]-\infty ; -2[\cup]-\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}[.$$

Limite en $-\infty$:

$$\frac{2x^2+3x-2}{-3x-1} \underset{-\infty}{\sim} \frac{2x^2}{-3x} = -\frac{2}{3}x \xrightarrow{-\infty} +\infty$$

donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$

3] $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 1}} = \sqrt{v(x)}$

Domaine de définition ; $v(x) \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$.

$2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$: $P(1) = 0$. donc factorisable par $(x-1)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ -(2x^3 - 2x^2) & \hline 2x^2 - x + 2 \\ \hline -x^2 + 3x - 2 & \\ -(-x^2 + x) & \\ \hline 2x - 2 & \end{array}$$

donc $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x-1)(2x^2 - x + 2)$

$2x^2 - x + 2$: $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ pas factorisable. et toujours positif.

Ainsi $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 1} = 2x^2 - x + 2 \geq 0$

$\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

• $\lim\limits_{1} f(x) = \sqrt{3}$

• en $+\infty$: $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Exercice 3 :

les fonctions usuelles e^{-x}, $2|x-\frac{1}{2}|$ et $\frac{5x+2}{x+2}$ sont continues sur leurs ensemble de définition.

donc f continue sur $]-\infty,0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[$

en 0 :

$$\lim_{0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-x} = 1$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 2|x-\frac{1}{2}| = 1$$

et $f(0) = e^0 = 1$

donc $\lim_{0} f(x) = f(0)$ f est continue en 0.

en 2 : $f(2) = 2|2-\frac{1}{2}| = 3$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{2^+} f(x) = \lim_{2^+} \frac{5x+2}{x+2} = \frac{12}{0^+} = +\infty.$$

f est continue en 2 : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

1) $f(x) = \ln(6-|x^2-10|) - \ln(4-|x-1|)$

$|x^2 - 10| < 6 \iff -6 < x^2 - 10 < 6$

$4 < x^2 < 16$

$x \in]2;4[\cup]-4;-2[$.

$|x-1| < 4 \iff -4 < x-1 < 4$

$-3 < x < 5$.

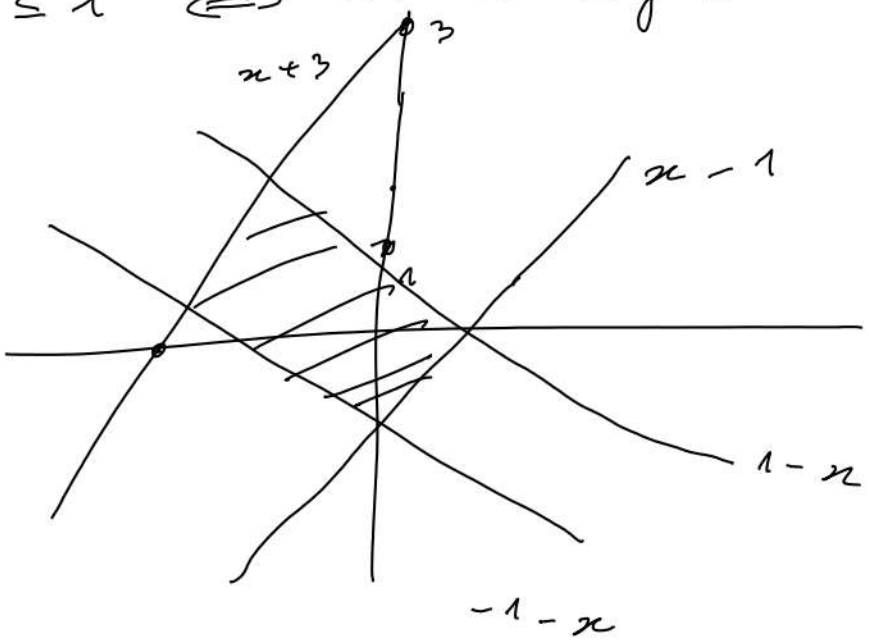
Bilan : $x \in]-3;-2[\cup]2;4[$.

4) $|-x+y-1| \leq 2$ et $|x+y| \leq 1$

$|-x+y-1| \leq 2 \iff -2 \leq -x+y-1 \leq 2$

$x-1 \leq y \leq x+3$

$|x+y| \leq 1 \iff -1-x \leq y \leq 1-x$



Exercice 5 :

$f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{\sqrt{x+2}}$

$$f(x) = \frac{x(x^2-x-6)}{\sqrt{x+2}} = \frac{x(x-3)(x+2)}{\sqrt{x+2}}$$

Domaine : $x+2>0$ $\quad Df :]-2;+\infty[$.

limite en -2 : $\quad f(x) = x(x-3)\sqrt{x+2}$

donc $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

on peut prolonger f par continuité en -2 en posant $f(-2)=0$.

$$D\hat{f} = [-2;+\infty[.$$

$$\hat{f} \begin{cases} f(-2)=0 \\ f(x) \quad \text{pour } x \neq -2 \end{cases}$$

Exercice 6 :

1) Faux. $\quad \sin x + x^2 + 2e^x \underset{+\infty}{\sim} 2e^x$

$$\frac{\sin x + x^2 + 2e^x}{e^x} = 2 + \lim_{+\infty} \frac{\sin x}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}$$

$\to 2 \neq 1$ quand $x \to +\infty$; $\frac{\sin x}{e^x} \to 0$ car $\left|\frac{\sin x}{e^x}\right| \leq \frac{1}{e^x} \to 0$; $\frac{x^2}{e^x} \to 0$ par croissance

2) $x>1 \Rightarrow \ln x$ définie donc $x>1$ est une condition suffisante Vrai

3) $\begin{cases} L_1 : 2x-y=1 \\ L_2 : -4x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \\ L_2+2L_1 : 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-y=1$ une droite de solution Faux.

4) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2}{x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}_{\to 2 \text{ en } +\infty}\right)}$

donc $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ Vrai

5) $\dfrac{e^{x^2-x+1}}{e^{x^2}} = e^{-x+1} \xrightarrow{+\infty} 0$

donc Vraie $e^{x^2-x+1} = o\left(e^{x^2}\right)$

Exercice 7 :

· $P(n)$: $n! \geq 2^{n-1}$

Init : $n = 1$. $1! = 1$ et $1 \geq 1$ $P(1)$ est Vrai.
$2^{1-1} = 2^0 = 1$

Récurrence : si $P(n)$ Vrai on veut montrer $P(n+1)$: $(n+1)! \geq 2^n$

$$\left.\begin{array}{l} n! \geq 2^{n-1} \\ \text{et} \quad n+1 \geqslant 2 \end{array}\right\} \times \quad n! \cdot (n+1) \geqslant 2^{n-1} \cdot 2$$

$$(n+1)! \geqslant 2^n .$$

la récurrence est vérifiée.