DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (7 points)
Calculer les intégrales ou donner toutes les primitives dans les cas suivant :

1. $\int_1^2 5te^{t^2}dt$
2. $\int \frac{z^2}{(2z^3+7)^3}dz.$
3. $\int \frac{1+u+\arctan(u)}{1+u^2}du.$
4. $\int_0^\pi \left(1-\frac{2}{\pi}t\right)\cos(3t)dt.$
5. $\int (\sin(x))^3(\cos(x))^3dx.$
6. $\int_0^1 2^{t+3}dt.$

Exercice 2. (2 points)
Soit n un entier naturel non nul, soit

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3n+2k}{n}\right).$$

Déterminer la limite de la somme précédente quand n tend vers $+\infty$ sous forme d'une intégrale, puis calculer cette intégrale.

Exercice 3. (3 points)
Calculer l'intégrale suivante en effectuant le changement de variables $x = \sqrt{t+1}$:

$$\int_0^3 \frac{t+2}{t+\sqrt{t+1}+1}dt.$$

Exercice 4. (4.5 points)

1. Simplifier l'expression suivante puis la dériver : $\ln(\frac{x+x\sqrt{x}}{(x^7+x^4)(x+2)^2})$

2. Résoudre l'équation suivante :
$$\frac{10^x}{2^{x+3}} = 6.$$
3. Résoudre l'équation différentielle
$$(E)\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \cos(t) + \sin(t)$$
puis déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 5. (2 points)
Soit $f(x, y) = x^y + ych(x + y^2)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f.
3. Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Exercice 6. (2 points)

Déterminer les limites suivantes quand $(x, y) \to (0, 0)$:

1. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$.
2. $g(x, y) = 1 + x + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Rappel :

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in ...$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan}\, u$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\text{Argth}\, u$	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\text{Arcsin}\, u$	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\text{Argsh}\, u$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\text{Argch}\, u$	$]1;+\infty[$