DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2 points)

Prouver la propriété suivante : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ avec f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ en utilisant les sommes de Darboux.

Exercice 2. (2 points)

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2(n+k)}$$

Exercice 3. (5 points)

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

1) $\int e^{-2t}\cos t dt$, 2) $\int \cos^4 t \sin^3 t dt$, 3) $\int \arccos(2x)dx$,

4) $\int_1^e \frac{\ln^n x}{x} dx$ en posant $u = \ln x$ 5) $\int \frac{2t+3}{t^2+9} dt$

Exercice 4. (2,5 point)

Calculer cette primitive à l'aide des règles de Bioche. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5\cos t}{2\sin t - 3} dt$

Exercice 5. (2,5 points)

Donner le domaine de définition, calculer la limite en $(0,0)$ et étudier le prolongement par continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = (x-y)\cos\frac{1}{x}$
2. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

Exercice 6. (4 points)

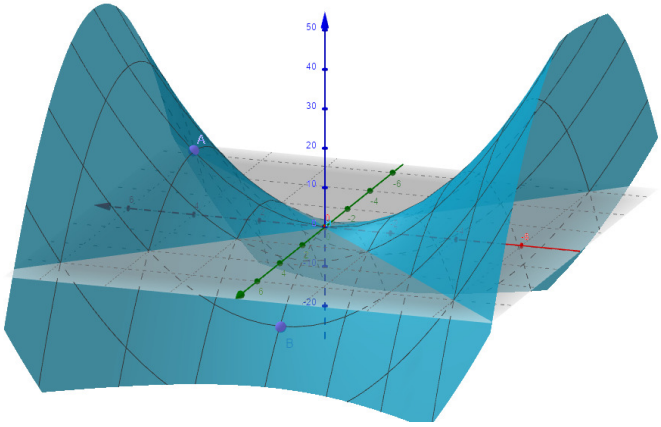
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer la dérivée partielle de f par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$.

3. f est-elle de classe C^1 en (0,0) ?

Exercice 7. (2 points)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$. Soit (S) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La lignes de niveaux représentées sur la surface sont les lignes de niveaux $x = k$ et $y = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. Identifiez les axes (Ox) et (Oy) de la figure en justifiant votre réponse.
2. Dans quel plan se trouve la ligne de niveau de (S) des points $M(1, y, f(1,y)), y \in \mathbb{R}$? Quelle est la nature de cette ligne de niveau ? Représentez la ligne de niveau de sur la figure.
3. Donner l'équation de la courbe de la ligne de niveau z=0. Représentez la ligne de niveau sur la figure



Rappel :

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in$ ...
$\frac{u'}{1+u^2}$	Arctan u	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{1-u^2}$	Argth u	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	Arcsin u	$]-1;1[$
$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	Arccos u	$]-1;1[$
$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	Argsh u	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	Argch u	$]1;+\infty[$