DS2 M2.2 2023-2024

Total 20.5pts

8. pts

Exercice 1. (8 points)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit les vecteurs suivants :

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_3, \quad \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad \varepsilon_3 = e_2 - e_3.$$

On définit également f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $\mathcal{B}'$ est une base si $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. 0.25

1) 0.75

10 matrice 0.25

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2(-1)$$

$$= -1 \neq 0$$

Calcul et cc 0.25

$\mathcal{B}'$ est une base et $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) 1.5

2) Dans $\mathcal{B}$: $f(\varepsilon_1) = A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}'}$

- méthode et cc : 0.5
- calculs effectifs : 1

$f(\varepsilon_2) = A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Attention s'ils sont passés à $P^{-1}AP$ mettre 1pt/2pts

$f(\varepsilon_3) = A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} L_1 & \alpha + 2\beta = 2 \\ L_2 & \beta + \gamma = 2 \\ L_3 & \alpha + 2\beta - \gamma = 1 \end{cases}$$

$L_1 - L_3 : \gamma = 1$

$\Rightarrow \beta = 1$

$\Rightarrow \alpha = 0$

- $f(\varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) la formule du binôme de Newton est valide si $AB = BA$ 0.25

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \quad 0.25$$

3) 0.75

4)

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \quad 0.25$$

$J^2 = 0$ 0.25

donc J est nilpotente d'ordre 2 0.25

4) 1.25

$$DJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad JD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifications 0.25 × 2

5) $T^n = (D+J)^n = D^n + nD^{n-1}J + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2} J^2 + 0$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $JD = DJ$

5) 1

6) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 0.25

$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\mathrm{com}(P)$ formule 0.25

calcul $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6) 1.5

7) $A = P T P^{-1} \Leftrightarrow T = P^{-1} A P$

$\Rightarrow A^{10} = P T^{10} P^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & 2 & -18 \\ 10 & 1 & -10 \\ 17 & 2 & -17 \end{pmatrix}$

7) 1.25 — 0.5 + 0.75 acquis

Exercice 2 : (4)

$f(t) = 1 - e^{-2t}$ $\quad u_0 = u_0$

$u_{n+1} = f(u_n)$

1) $f'(t) = 2e^{-2t} > 0$ donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

$I = \mathbb{R}$ alors $f(I) =]1, +\infty[$

$\forall u_0 \in \mathbb{R}$ (u_n) bien définie

donc u_n est monotone $\forall u_0 \in \mathbb{R}$.

on compte juste des 2 qu'on ait mis (u_n) monotone et bien définie

1) 0.5

2) $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$

2) 0.25

3) . Si on prend $I =]\alpha; +\infty[$.

$f(I) =]f(\alpha); \lim_{+\infty} f[=]\alpha; +\infty[$ — 0.5

donc si $u_0 \in I$; u_n est bien définie et $u_n \in I$. — 0.25

$\forall n$; $u_n \geq \alpha$.

ou par récurrence

- Signe de $f(x) - x$ donné dans l'énoncé

donc

- $\hat{c}$ $u_1 \leq u_0$: (u_n) est décroissante → 0.25
- $\hat{c}$ $\forall n$ $u_n \geq \alpha$: (u_n) est minorée par α → 0.25
- donc (u_n) est convergente par le thm de la limite monotone vers l → 0.25

or f continue

donc

3) 2

$f(l) = l$ et $l \geq 2$ donc $\underline{l = \alpha}$ 0.25

0.25

4) 1.25

3) Si $I = [0; \alpha]$

$f(I) = [f(0); f(\alpha)] = [0; \alpha]$ donc

u_n est bien définie et $\forall n \; u_n \in [0, \alpha]$. 0.25

. Si $u_0 = 0$ u_n est constante égal à 0.) 0.25

. si $u_n > 0$ $u_1 \geq u_0$ donc u_n est croissante et majorée

et CV vers α / $f(l) = l$ car f continue $\Rightarrow l = \alpha$ 0.75

Exercice 3. ~~(2 points)~~ 1.75pts

On définit (u_n) et (v_n) comme suit : pour $n \geqslant 0$,

$$u_n = n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) - 1, \quad v_n = \frac{-3n + 4n^2 + 3\cos(n)}{2n^2 + e^{-3n} + \sin(\frac{1}{n}) + 4}.$$

1) CV de u_n :

$\ln(1 + \frac{3}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2$) 0.75

car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3 \cdot 1 = 2$

1) 1.75

de v_n :

$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{2n^2} = 2$) 0.5

2) $\lim v_{2n} = \lim v_{2n+1} = 2$ donc la suite v_n

2) 0.5

est CV vers 2.

Exercice 5. ~~(3 points)~~

Exo 3. 4.5 pts

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} 2t.y'(t) - y(t) = 3t^2 - 1, & \forall t > 0 \\ y(1) = 5 \end{cases}.$$

2. On pose $(E) : y'.(y-2) = -1$. Déterminer l'expression des solutions et, pour chacune d'elles, préciser son domaine de définition.

1] $I =]0, +\infty[$.

$$2ty' - y = 3t^2 - 1 \qquad y(1) = 5.$$

équat° linéaire

$$\hookrightarrow y' - \frac{1}{2t}y = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t}$$

Solution de l'équation homogène :

$a(x) = -\frac{1}{2t}$ $\quad A(x) = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln t$ car $t > 0$

$$y_H = K e^{\frac{1}{2}\ln t} = K\sqrt{t}$$

1 point
- loi : 0.25
- nature : 0.25
- nombre : 0.25
- résolut° homogène : 0.5

Solution particulière sous la forme $y_p = K(t)\sqrt{t}$ forme 0.25

$$\Rightarrow K'(t)\sqrt{t} = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t} \quad \} 0.25$$

$$K'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2}$$

$$K(t) = t^{3/2} + t^{-1/2} \quad) 0.25$$

$$y_p = \left(t^{3/2} + t^{-1/2}\right)t^{1/2} = t^2 + 1 \quad) 0.25$$

$$y = K\sqrt{t} + t^2 + 1 \quad) 0.25$$

condition initiale : $y(1) = 5$

$$5 = K + 2 \qquad \underline{K = 3} \quad) 0.25$$

1) 2.5

2] $x^2 y' = y^2 + xy + x^2$ équat° homogène 0.25

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$$

on pose $z = \frac{y}{x}$ 0.25

$$y' = z + xz' \quad 0.25$$

2) 2

$z + xz' = z^2 + z + 1$ 0.25

$xz' = z^2 + 1$

$\frac{z'}{z^2+1} = \frac{1}{x}$ 0.25

$\arctan y = \ln(x) + k \quad (x \in]0; +\infty[)$ 0.25

$y = \tan(\ln(x) + k)$ 0.25

$\Rightarrow y = x\left(\tan(\ln(x) + k)\right)$ 0.25

Exo 4 : 2.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2a-4 \end{pmatrix}$$

sinon à voir en fonction de la méthode utilisée à répéter
- pour la valeur unique : 1.25
- infinité : 0.5 : 0.5
- $\emptyset$

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2a-4 \end{vmatrix} + 0 + 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

en développant suivant la 1ère colonne

$= (2a - 4 + 9) + 0 + 2(-3+2)$

$= 2a + 5 - 2$

$= 2a + 3$ 0.5

cas 1 : $2a+3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3/2$ | 0.25

$\det(A) \neq 0$

A est inversible le système est de Cramer et admet 1 unique solution (x_0, y_0, z_0) avec

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ b & 3 & 2a-4 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & b & 2a-4 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix}}{\det A}$$

principe de l'ordre 0.5

0.75

2ème cas : Si $2a+3 = 0 \Leftrightarrow a = -3/2$ | 0.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y - 3z = -1 \\ -2x + 3y - 7z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = x + 3z - 1 = z - 1 \\ 4z + 3z - 3 - 7z = b \end{cases}$$

1

- Si $b \neq -3$: $S = \emptyset$ | 0.5
- Si $b = -3$: infinité de solut°

$$S = \{(-2z, z-1, z), z \in \mathbb{R}\}$$ | 0.5