DS 3 M 2.2 2022

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = f_1 + 7 f_3$

2) $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x + 2y + 3z \\ -y + z \\ 7x + 3y + 2z \end{cases}$$

3) $f(v) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

4) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\begin{cases} v = X \text{ dans } \mathcal{B} \\ v = Y \text{ dans } \mathcal{C}. \end{cases}$

alors $X = PY$ = formule de changement de base pour un vecteur

ou $\begin{cases} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = X \\ \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = Y \end{cases}$

5)

$$P = \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\det P = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Comat } P \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\beta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

donc $\alpha = \frac{\beta}{\det P} = -1$

P^{-1} : matrice de passage de C vers B.

Exercice 2 :

$$y' + a(x)\, y = 0$$

$$g(x) = f(x)\, e^{A(x)}$$

1) $f(x) = g(x)\, e^{-A(x)}$

f est solution $\Leftrightarrow f'(x) + a(x) f(x) = 0$

$$g'(x)\, e^{-A(x)} - a(x) g(x)\, e^{-A(x)} + a(x) g(x) e^{-A(x)} = 0$$

$$g'(x)\, e^{-A(x)} = 0 \quad \text{et} \quad e^{-A(x)} > 0$$

donc $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = K. \in \mathbb{R}$

ainsi f est solution de (H) $\Rightarrow f(x) = K e^{-A(x)}$ $K \in \mathbb{R}$

2) réciproquement si $f(x) = K e^{-A(x)}$ alors f est solution de (H).

les solutions de (H) sont $f(x) = Ke^{-A(x)}$ $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

$$\begin{cases} mx + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = m \\ (m+1)x + 2y + 3z = t \end{cases} \iff AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ t \end{pmatrix}$$

$$\det A = m \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -7m - 9 + 6m + 6 + 2 + m + 1$$

$$= 0$$

$\operatorname{rg} A = 2$ (2 dernières colonnes non colinéaires)

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sous matrice de rg 2.

$$\begin{cases} 3y + z = 2 - mx & L_1 \\ -y + 2z = m - x & L_2 \end{cases}$$

$L_1 + 3L_2$

$$\begin{cases} 7z = 2 + 3m - (m+3)x \\ z = \frac{1}{7}(2 + 3m - (m+3)x) \end{cases}$$

$L_2 - 2L_1$: $-7y = m - 4 + (2m-1)x$

$$y = -\frac{1}{7}(m-4) + (2m-1)x$$

Vérification dans la 3ème ligne :

L_1+L_2 : $\quad 2y + 3z = 2+m-(m+1)x$

3ème ligne : $\quad 2y + 3z = t-(m+1)x.$

si $t \neq 2+m$ pas de solutions.

si $t = 2+m$

$$S = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ -\frac{1}{7}[(m-4) + (2m-1)x] \\ \frac{1}{7}\{2+3m - (m+3)x\} \end{vmatrix} \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7}(m-4) \\ \frac{1}{7}(2+3m) \end{vmatrix}}_{A} + x \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ (2m-1) \\ -(m+3) \end{vmatrix}}_{u}$$

S est la droite passant par A de vecteur directeur u

Exercice 4 :

1) $\quad xy' = \frac{x^2}{y} e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + y \qquad I =]0;+\infty[.$

equation homogène : soit $z = \frac{y}{x}$

$y = z \cdot x$
donc $y' = z' \cdot x + z$

1) $\Rightarrow y' = \frac{x}{y} e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$

$\Rightarrow x z' + z = \frac{e^{z^2}}{z} + z$

$\Rightarrow z' z e^{-z^2} = \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{2} e^{-z^2} = \ln|x| + k \qquad x > 0$

$\ln\left(e^{-z^2}\right) = \ln\left(-2\left(\ln(x) + k\right)\right)$

$z = \pm\sqrt{-\ln\left(-2\left(\ln x + k\right)\right)}. \quad k \in \mathbb{R}.$

2) $x y' + \frac{5x}{x+1} y = \frac{1}{(x+1)^6}$ $\qquad I =]0; +\infty[$

$y(1) = 5$

équation résolue :

$y' + \frac{5}{x+1} y = \frac{1}{x(x+1)^6}$

Solution de l'équation homogène :

$a(x) = \frac{5}{x+1}$ $\qquad A(x) = 5\ln(|x+1|)$ ici $x > 0$
$= 5\ln(x+1)$

$y_H = k e^{-5\ln(x+1)} = \frac{k}{(x+1)^5}$

Solution particulière :

avec $y_p = \frac{k(x)}{(x+1)^5}$ on obtient

$$\frac{k'(x)}{(x+1)^5} = \frac{1}{x(x+1)^6} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$x\,k'\big|_{x=0} = 1 = a$ $\qquad (x+1)k'\big|_{x=-1} = b = -1$

$$k'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \qquad k(x) = \ln|x| - \ln(x+1)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$y_p = \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(x+1)^5}$$

Solution complète : $y = y_H + y_p = \frac{1}{(x+1)^5}\left(K + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$

Condition initiale : $y(1) = 5$.

$$5 = \frac{1}{2^5}\left(K + \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$K = 5 \cdot 2^5 - \ln\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ 1 unique solution

3) $y' + xy^2 = -x$

$\Rightarrow y' = -x(1+y^2)$

equat. à variables séparables

$\Rightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = -x$

$\Rightarrow \arctan y = -\dfrac{x^2}{2} + k$

$y = \tan\left(-\dfrac{x^2}{2} + k\right)$

Exercice 5 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = P^{-1}AP$ donc A et D sont deux matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (u, v, w)$

on cherche la base $\mathcal{C}$ / $\begin{cases} f(u) = -2u \\ f(v) = -2v \\ f(w) = w \end{cases}$

Soit X les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$

(1) $f(u) = -2u \iff AX = -2X.$

$(A + 2I)X = 0$

(1) $\Leftrightarrow$

avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2 vecteurs libres : $u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1 vecteur tel que $AX = X$ (2)

$(A - I)X = 0$

(2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 & x = y \\ -3y + 3z = 0 & y = z \\ \cancel{-3y - 3z = 0} \end{cases}$$

$w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(u, v, w) est bien 1 base car $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Dans la base $\mathcal{C}(u, v, w)$

$f(u) = -2u \quad f(v) = -2v \quad f(w) = w$

donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f = D$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exo 6 :

- $n = 2$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A_2) = (-1)^2$

- $n = 3$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En développant par rapport à la 3e ligne

$$\det A_3 = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3$$

- Notons "$P(n)$: $\det(A_n) = (-1)^n$"

I : $P(2)$, $P(3)$ vraie

H : Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 3$,

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & \vdots \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Par développement suivant la dernière ligne

$$\begin{aligned} \det(A_{n+1}) &= (-1) \times \det(A_n) \\ &= (-1) \times (-1)^n \quad \text{par HR} \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ vraie

Cl : $\forall n \geq 2 \quad \det(A_n) = (-1)^n$