DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. Questions de cours (2 points)

1. Soit f une fonction définie sur I. Quelle propriété la phrase suivante traduit elle ?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{0\}, |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) + 3| \leqslant \varepsilon$$

2. Donner la limite en 0 de $\dfrac{\cos(x) - 1}{x}$: on attend la démonstration comme dans le cours.

Exercice 2. (7 points)

Déterminer si les fonctions f suivantes admettent une limite en a et la calculer si c'est le cas :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ en $a = -\infty$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$ en $a = +\infty$
3. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ en $a = 2$
4. $\dfrac{\sin(|x|)}{x}$ en $a = 0$
5. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{10}}{x - 3}$ en $a = 3$

Exercice 3. (1.5 points)
Soit f la fonction définie par :
$f(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x)}{e^{3x} - 1}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 4. (2 points)

Déterminer les réels x tels que :

1. $|2x| \leqslant 5$ ou $|x - 4| \geqslant 1$
2. $| - x + 1| > 2$ et $|2x + 1| \leqslant 4$

Exercice 5. (2 points)
Déterminer les points $M(x, y)$ du plan tels que $|y - x^2| \leqslant 1$: on représentera les solutions à l'aide d'un graphique.

Exercice 6. (2.5 points)

Considérons la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \text{ si } x \leqslant 1 \\ f(x) = x - \dfrac{1}{2} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1. f est elle continue ?
2. f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
3. f est elle de classe $\mathcal{C}^2$?
4. Que vaut $f([-3, 2])$?

Exercice 7. (3 points)

Considérons la fonction f définie par $f(x) = e^{-2\sqrt{x}}$

1. f est elle dérivable en 0 ?
2. Calculer la différentielle de f en 4.
3. En déduire une expression de la valeur approchée de $f(4.01) - f(4)$.
