DS M2.2 N°3

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (5 points)
Soient E et F deux espaces vectoriels. On notera (e_1, e_2, e_3) une base $\mathcal{B}$ de E et (f_1, f_2, f_3) une base $\mathcal{C}$ de F. Nous considérons une application linéaire de E dans F ayant pour matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(e_1)$.
2. Déterminer l'expression analytique de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Soit u un vecteur de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$. Comment déterminer $f(u)$ par un calcul matriciel ? On ne fera pas le calcul.
4. Soient X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. On suppose que $X = PY$. Comment interpréter X et Y ?
5. On prendra pour P la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calculer le coefficent en 2 ème ligne et 3 ème colonne de P^{-1}. On détaillera le calcul.
6. Que représente P^{-1} ?

Exercice 2. (2 points)

Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients non constants

$$y' + a(x)y = 0 \ (H)$$

sur l'intervalle I et soit f une solution de(H).
On introduit la fonction g telle que $g(x) = f(x)e^{A(x)}$ où A est une primitive de a sur l'intervalle I.

1. En utilisant la fonction g, déterminer les solutions éventuelles de (H).
2. En déduire les solutions de (H).

Exercice 3. (4 points)

Résoudre le système suivant en fonction des paramètres réels m et t puis donner une interprétation géométrique des solutions :

$$(S) : \begin{cases} mx + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = m \\ (m+1)x + 2y + 3z = t \end{cases}$$

Exercice 4. (4.5 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $xy' = \dfrac{x^2}{y} e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + y$ sur $I =]0, +\infty[$
2. $xy' + \dfrac{5x}{x+1} y = \dfrac{1}{(x+1)^6}$ sur $I =]0, +\infty[$ et $y(1) = 5$.
3. $y' + xy^2 = -x$

Exercice 5. (3 points)

Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice P telle que

$$D = P^{-1}AP$$

.

Exercice 6. (1.5 points)

Considérons la matrice carrée de taille n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A en détaillant les calculs.