DEVOIR SURVEILLE M1.1 N2

Calculatrice et documents non autorisés. **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4.5 points)

1. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$
2. Déterminer si les phrases suivantes ont vraies ou fausses , justifier votre réponse à l'aide d'un théorème ou d'une définition du cours ou d'un contre exemple.

(a) Il existe des fonctions minorées et non majorées.
(b) Un minimum est un minorant
(c) La fonction définie par $f(x) = \mathrm{sh}(x)th(x)$ est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.
(d) Le domaine de définition de la fonction $f(x) = (\frac{1}{x})^{x^2}$ est $\mathbb{R}^*$.
(e) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ayant le tableau de variations ci dessous

x	$-\infty$		-7		3		4		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	4	↘	-7	↗	66	↘	1

i. -7 est la borne inférieure de f.
ii. 70 est un majorant de f.
iii. 4 est un maximum pour f.

Exercice 2. (2.5 points)

1. Soit $f(x) = \cos(2x) + \tan(3x)$, déterminer la plus petite période de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = -\sin(x)$.
3. Résoudre dans $[0, 2\pi[$: $0 \leqslant \cos(2x + \pi) \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 3. (4.5 points)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$(E)\, 3\frac{dU}{dt} + 5U = 5t^2 + 6t + 5,$$
puis déterminer la solution de E telle que $U(0) = 1$.

2.

- Soit $f(x) = x.sh(\frac{x}{2})$. Calculer $4f''(x) - f(x)$.
- Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$4y'' - y = 4ch(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2}).$$

(On pourra utiliser la question précédente).

Exercice 4. (2 points)
Nous considérons les trois fonctions f, g, h suivantes :

$$f(x) = |x| \quad g(x) = |x+3| \quad h(x) = |2x+3| - 1$$

.

1. Donner les transformations géométriques permettant de passer de la courbe de f à celle de g, puis de celle de g à celle de h.
2. Tracer la représentation graphique de ces trois courbes entre $[-3, 2]$. On détaillera toutes les étapes.

Exercice 5. (6.5 points)

Soit m un paramètre réel **positif ou nul** soit f la fonction définie par :

$$f(x) = ln(x^2 + mx + 1)$$

1. Donner le domaine de définition de f. (On distinguera 3 cas en fonction du paramètre m qui est positif ou nul.)
2. Donner les limites aux bornes du domaine de définition de f.
3. Déterminer les branches infinies.
4. Dresser le tableau de variations (on distinguera plusieurs cas en fonction de m).
5. Donner l'allure de la représentation de f dans chacun des cas précédents.