DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2 points)

1. Mettre sous la forme algébrique les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{4+i}{(2+2i)^2}$.

(b) Avec les notations physiques, où $R, L, \omega > 0$, $\dfrac{R+jL}{R+jL\omega}$.

2. Toujours avec les notations physiques et $R, L, C, \omega > 0$, donner le module de $\dfrac{RC\omega}{R+jL}$.

Exercice 2. (2.5 points)

1. Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{1}{z-1} = 1 + \dfrac{2i}{1-i}$.
2. Trouver z (exprimé sous forme algébrique en fonction de $R, C > 0$) tel que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{R} + i\dfrac{1}{C}$.
3. Trouver les z tels que $z^2 + 3z + 4 = 0$.

Exercice 3. (2.5 points)

1. Donner toutes les solutions de l'équation $z^3 = \dfrac{i}{-1+\sqrt{3}i}$.
2. Écrire sous forme exponentielle $(-3+\sqrt{3}i)^{10}$.

Exercice 4. (2 points) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1\}$. Calculer l'intégrale suivante (on ne demande pas de représenter le domaine $\mathcal{D}$) :

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} x\, dxdydz.$$

Exercice 5. (1.5 points)
Soit $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leqslant z \leqslant 4(x^2+y^2) \leqslant 1\}$. En choisissant un système de coordonnées adaptées, déterminer le volume de $\mathcal{D}$.

Exercice 6. (1.5 points)
Soit $\mathcal{D}$ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(3, 5)$. Représenter le domaine et exprimer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dxdy$.

Exercice 7. (3 points) En utilisant le changement de variables $u = xy$ et $v = x + 1$, calculer l'intégrale suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2 y}{x+1}\, dxdy,$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leqslant x \leqslant 2\,;\ 1 \leqslant xy \leqslant x + 1\}$.

Exercice 8. (3 points)
Pour $a, b > 0$, le contour (C) de l'ellipse $\mathcal{E}$ est donné par la paramétrisation suivante : $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

1. Linéariser $(\cos(t))^4$.
2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{(C)} x^3\, dy$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\iint_{\mathcal{E}} x^2\, dxdy$.

Exercice 9. (2 points) Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ par

$$\omega = \frac{1}{y}dx + (1 - \frac{x}{y^2})dy$$

1. La forme ω est-elle exacte ? Si oui, déterminer u telle que $\omega = du$.
2. Soit $A = (2, 1)$ et $B = (0, 5)$ et (C) une courbe reliant A à B dans $\mathcal{U}$: calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$.