DEVOIR SURVEILLE M1.2 N°3

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (8 points)
Dessiner D_i et exprimer l'intégrale double $\iint_{D_i} f(x,y)dxdy$ sur les domaines D_i cités. On ne cherchera pas à simplifier les longues expressions numériques.

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x + \frac{1}{2},\ y \geqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ pour $f(x,y)$ quelconque.
2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x \leqslant 3,\ y \geqslant x,\ y \leqslant -x^2 + 4x\}$ et $f(x,y) = x$
3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant 0\}$ et $f(x,y) = xy^2$
4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x + y \leqslant 1,\}$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(1-x)^2}$ en posant $x = u$ et $y = (1-u)v$

Exercice 2. (2 points)

Soit S le prisme définit par les sommets suivant $O(0,0,0), A(2,0,0), B(2,0,1), C(0,0,1), D(0,3,0)$ et $E(2,3,0)$

1. Dessiner le prisme.
2. Exprimer l'intégrale triple $\iiint_S f(x,y,z)dxdydz$ sur le solide S.

Exercice 3. (2 ponts)
On considère un cylindre S, de rayon 1, centré sur l'axe Oy et y allant de 0 à 2.
Calculer $\iiint_S xydxdydz$.

Exercice 4. (1,5 point)
Soit $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ dans un repère orthonormé $(Oxyz)$. Donner les coordonnées sphériques de M.
On justifiera les calculs à l'aide d'un schéma si nécessaire.

Exercice 5. (2,5 points)
On considère la forme différentielle $\omega = (1 + x + y)e^x dx + e^x dy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ω est exacte.
2. Calculer son intégrale sur la parabole $y = x^2$ x allant de 0 vers 1.

Exercice 6. (4 points)
Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant y \leqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et $\omega = (x + y)dx - ydy$.
Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le contour de D en utilisant la définition puis par Green-Riemann.