DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (6 points)

1. Donner l'expression simplifiée de la dérivée de arcosinus et redémontrer cette expression.
2. Que valent $\arccos(\cos(4\pi/3))$, $\arcsin(2\pi/3)$, $\arcsin(-\sin(\pi/6))$?
3. Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, que vaut $\arctan(\tan(\theta))$, justifier votre réponse.
4. Donner le domaine de définition de $\arccos(2x^2)$.
5. Donner la dérivée de $\arctan(\frac{x}{2})$.
6. Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F tels que $A \subset F \quad B \subset F$ démontrer que

$$f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

.

Exercice 2. (2,5 points)
Considérons la fonction f ayant le tableau de variations ci dessous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $f([-1, +\infty[$
4. Considérons les fonctions suivantes

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} [1, +\infty[\to [-1, +\infty[\\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

pour chacune d'elle préciser si la fonction est injective, surjective, bijective vous justifierez à chaque fois votre réponse

Exercice 3. (5 points)
Pour les fonctions préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Si la fonction est bijective donner sa fonction réciproque en précisant les intervalles de départ et d'arrivée.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 0) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2, x+y) \end{cases}$
3. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x-y) \end{cases}$

Exercice 4. (1,5 points) Résoudre le système suivant à l'aide des matrices en discutant suivant les valeurs de a :

$$\begin{cases} ax + y &= 1 \\ x - 2y &= 1 \end{cases}$$

Exercice 5. (5 points)

1. Déterminer les entiers tels que $x^2 = o(x^n)$ au voisinage de 0.
2. Sachant que $f(x) = 1+x+o(x)$ peut on dire que $(f(x))^2 = 1+2x+x^2+o(x^2)$? Justifier votre réponse à l'aide d'un contre exemple ou d'un théorème du cours.
3. Donner le $DL_2(0)$ de $\ln(1+2x)$.
4. Donner le $DL_3(0)$ de $\sin(x) + \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.
5. Donner le $DL_4(0)$ de $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+x}$.

Formulaire : Développements limités usuels en 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\mathrm{ch}\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\mathrm{sh}\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$