DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.** Barème indicatif.

Exercice 1. (2,5 points)

1. Simplifier $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$
2. Donner la démonstration de la dérivée de $\operatorname{Argch} x$.

Exercice 2. (8 points)

1. Donner le $DL_3(0)$ de $\cos(x)\ln(1+2x)$.
2. Donner le $DL_3(+\infty)$ de $\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)$.
3. Donner le $DL_2(1)$ de $e^{\frac{1}{x}}$.
4. Donner le $DL_2(0)$ de $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(e^x-1)}$.
6. Soit $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

(a) Donner le $DL_1(-\infty)$ de f.

(b) Donner une équation de l'asymptote oblique Δ de f en $-\infty$ ainsi que sa position relative par rapport à la courbe représentative de f.

(c) En déduire l'allure de C_f et Δ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3. (3 point)

1. $f(x)=e^{2x}$ et $g(x)=e^{2x+1}$ sont elles équivalentes en $+\infty$?
2. Soit $f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

(a) Donner un $DL_2(0)$ de f.

(b) A t'on les hypothéses pour obtenir ce DL à l'aide de la formule de Taylor Young ?

Exercice 4. (5 points)
Soit f la fonction définie par $f(x)=\arctan(1+\cos x)$.

1. Donner le domaine définition de f.

2. Etudier la périodicité et la parité de f, en déduire un intervalle d'étude minimal I.
3. Calculer f'.
4. En déduire les variations de f sur I puis sur une période.
5. Représenter l'allure de la courbe sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 5. (1,5 poins)

1. Calculer AB et BA si possible avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si possible.

Formulaire : Développements limités usuels en 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$