DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (3 points)
Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ? Lorsqu'elles sont bijectives déterminer leur fonction réciproque.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto x+3y^2 \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x+1,-x) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y,x-2y) \end{cases}$

Exercice 2. (1,5 points)
Montrer que la fonction réciproque d'une bijection définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire est impaire.

Exercice 3. (1.5 points)
Donner un exemple de fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ injective et non surjective. Justifier votre réponse.

Exercice 4. (3 points)
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2+1 \end{cases}$

1. Déterminer $f([-2;1])$
2. Déterminer $f^{-1}([-6;-5])$
3. Déterminer deux intervalles I et J tels que la fonction g définie par $g : \begin{cases} I \to J \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ soit une bijection et déterminer g^{-1}.

Exercice 5. (1 point)
Exprimer plus simplement $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch} x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. (5 points)

1. Donner le $DL_3(0)$ de $\cos(x)\ln(1+x)$.
2. Donner le $DL_3(0)$ de $\cos(x/2)$.
3. Donner le $DL_2(0)$ de $\dfrac{x+3}{x+5}$

4. Donner le $DL_4(0)$ de $\cos(x+1)$ en utilisant la formule de Mac Laurin
5. Donner le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1}$
6. Donner le $DL_3(1)$ de $\ln(x)$ sans utiliser la formule de Mac Laurin

---

Exercice 7. (4 points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\arcsin x)$.

1. Donner le domaine définition de f.
2. Sur quel domaine f est elle dérivable et calculer f' sur ce domaine.
3. En déduire la nature de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Donner la limite aux bornes du domaine de définition et les variations de f.
5. Représenter l'allure de la courbe sur son domaine de définition.

Exercice 8. (1 point)

1. Calculer AB si possible avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si possible.

Formulaire : Développements limités usuels en 0.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}
$$