DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (1,5 points)
Soit B=(e_1, e_2) une base de E et B'=$(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

1. Montrer que B' est une base de E.
2. Soit u de coordonnées $(2; 2)$ dans la base B. Calculer les coordonnées de u dans B'.

Exercice 2. (1,5 points)
Soit (e_1, e_2, e_3) une famille libre de E, $E = vect(e_1, e_2, e_3)$ et F un espace vectoriel.
Soit f une application de E dans F.

1. $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est elle une famille libre de F ?
2. $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est elle une famille génératrice de F ?

Exercice 3. (2 points)
Soit E un espace vectoriel et $(e_1; e_2; e_3)$ une base de E. Déterminer le rang de la famille $(3e_1 - e_2 + 2e_3; e_1 - 2e_2 + e_3; 3e_1 + 4e_2 + e_3)$

Exercice 4. (2,5 points)
Montrer de 2 façons différentes que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$ est un sous espace vectoriel et déterminer une base de F.

Exercice 5. (3,5 points)
Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x; y) \mapsto (2x - y; x + 2y; -x + 5y) \end{cases}$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Déterminer Ker f et Im f On donnera une base de ces ensembles.
2. f est-elle injective, surjective ?
3. f est elle un isomorphisme ?

Exercice 6. (2,5 points)
(Démo de cours) Soit f une application linéaire de E dans E'. Montrer que f est injective si est seulement si ker $f = \{o_E\}$

Exercice 7. (2,5 points)
Soit E et F deux espaces vectoriel tels que $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$.
Soit f une application linéaire de E dans F. On admet que $\dim \mathrm{Im} f = 1$.

1. Peut-on avoir $\dim \mathrm{Ker} f = 2$? Si oui donner un exemple en précisant E, F et f.
2. Peut-on avoir $\dim \mathrm{Ker} f = 1$? Si oui donner un exemple en précisant E, F et f.

Exercice 8. (4 points)
On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit p l'application suivante

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c \mapsto bX \end{cases}$$

1. Montrer que p est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de p et donner une base de chacun de ces espaces vectoriels.
3. Montrer que $p \circ p = p$
4. Démontrer que $\mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p = \mathbb{R}_2[X]$