DEVOIR SURVEILLE M2.1 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (5,5 points)

1. Donner la limite suivante : $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(2x) - \ln(1+x) - x + \cos x - 1}{\tan x - x}$
2. A l'aide d'un DL, donner une équation de la tangente T en 2, la position relative de C_f par rapport à T au voisinage de 2 et représenter l'allure de T et C_f au voisinage de 2 pour la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+\ln(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$
3. A l'aide d'un DL asymptotique, donner une équation de l'asymptote Δ en $+\infty$, la position relative de C_f par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$ et représenter Δ et C_f au voisinage de $+\infty$ pour la fonction $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + x^2 + 3}{x-4}$

Exercice 2. (3,5 points)
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$. Montrer de 2 façons différentes que F_1 un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y = 0\}$ et $H = \{(\lambda, \lambda, -\lambda) \in \mathbb{R}^3 / \lambda \in \mathbb{R}\}$
   On admet que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(a) montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) G et H sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. (3 points)
Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriels des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soit F le $\mathbb{R}$ espace vectoriels des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Soit G le $\mathbb{R}$ espace vectoriels des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
On admet que G est un sev de E.

1. Montrer que F est une sev de E.
2. F et G sont ils supplémentaires dans E ?

Exercice 4. (questions de cours) (3 points)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

Montrer que si $F \cap G = \{0\}$ alors $F + G$ est directe.

Exercice 5. (5 points)
Les 3 questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (u, v, w) avec $u = (1, 1, 3)$ $v = (1, 2, 1)$ $w = (1, 4, 1)$ est-elle libre, génératrice ou une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Donner les coordonnées de $z = (1, 1, 0)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (-1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ $e_3 = (1, 0, 1)$.
3. Soit E un espace vectoriel avec dim $E = 3$, et u, v et w 3 vecteurs de E.
   Soit $F = Vect(u, v, w)$.
   Que peut-on dire de dim F ?(détailler les différents cas)

Formulaire : Développements limités usuels en 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$