DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°1

Documents non autorisés, Calculatrice non autorisée - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2.5 points)
Nous considérons le polynôme suivant

$$P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$$

1. Vérifier que 1 soit racine de P.
2. En déduire la factorisation de P.
3. En déduire le calcul de $\sum_{k=3}^{n} \frac{6}{k^3 - 2k^2 - k + 2}$.

Exercice 2. (6.5 points)
Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

1. $\frac{9X}{(X-2)^2(X+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$
2. $\frac{3X^2+5}{X^3(X^2+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$
3. $\frac{X^4+2}{X^3+4X}$ dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$
4. $\frac{X^2(X-2)}{(X^2-4X+4)^2}$dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 3. (2.5 points)
Soit E et E' un espace vectoriel et f est une application linéaire de E dans E'

1. Démontrer que $f(0_E) = 0_{E'}$
2. Démontrer que $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de E'.

Exercice 4. (5 points)
Soit p l'application définie par : $p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (2x-2z, y, x-z) \end{cases}$

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur c'est-à-dire que $p \circ p = p$.
3. Déterminer Ker p.
4. Calculer la rang de p.
5. Montrer que $Ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. (3.5 points)

Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans E', les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses, toute réponse devra être justifiée.

1. Si f est injective alors $dim(E) \leqslant dim(E')$.
2. Il est possible d'avoir $dim(E) = 4$ et $rang(f) = 5$.
3. L'application $h : \begin{cases} \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}^0 \\ f \mapsto 2f" \end{cases}$ est une application linéaire de noyau l'ensemble des fonctions constantes.
4. L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (xy, x, y) \end{cases}$ est un endomorphisme.