DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (3 points)

Considérons l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + 3y \end{cases}$$

1. f est elle une application linéaire ?
2. Déterminer le noyau de f. Que peut on en déduire ?
3. f est elle surjective ?

Exercice 2. (4 points)

Soit f une application linéaire de E dans E' deux espaces vectoriels, les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si $dim(Ker(f)) = 2$ alors on peut avoir $dim(E) = 3$.
2. S'il existe une famille libre dont l'image par f est libre alors f est injective.
3. Si $rg(f) = dim(E)$ alors f est surjective.
4. Si $dim(Im(f)) \leqslant 2$ et $dim(Ker(f)) \leqslant 3$ alors on peut rien dire sur $dim(E)$.

Exercice 3. (2 points)

Calculer le rang : $rg(u, v, w)$ avec $u(12, 15) \quad v = (6, 10) \quad w = (-3, 4)$.

Exercice 4. (5 points)

Considérons l'endomorphisme s défini par :

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

1. Que peut on dire de $s \circ s$?

2. On rappelle que $Id_E : \begin{cases} E \to E \\ X \mapsto X \end{cases}$. Vérifier que

$$(s + Id_{\mathbb{R}^2})(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2}+1)x + y, x + (\sqrt{2}-1)y)$$

.

3. Déterminer $Ker(s + Id_{\mathbb{R}^2})$, donner sa nature géométrique et en déduire une base.
4. Exprimer $(s - Id_{\mathbb{R}^2})(x, y)$.
5. On admet que $Ker(s - Id_{\mathbb{R}^2}) = Vect((1 + \sqrt{2}, 1))$.
   Montrer que $Ker(s + Id_{\mathbb{R}^2})$ et $Ker(s - Id_{\mathbb{R}^2})$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
6. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$: en le décomposant sur $Ker(s + Id_{\mathbb{R}^2})$ et $Ker(s - Id_{\mathbb{R}^2})$ exprimer simplement $s(v)$ puis en déduire une construction graphique de $s(v)$.

Exercice 5. (2.5 points)

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E'. Démontrer que Im(f) est un sous espace vectoriel de E' en utilisant uniquement la définition de l'image.

Exercice 6. (1.5 points)

Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du premier degré à coefficients constants est un espace vectoriel en utilisant le noyau d'une application linéaire qu'il faudra définir.

Exercice 7. (2 points)
Les questions ci dessous sont indépendantes.

1. Vrai ou Faux : toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
2. Étudier la limite et les variations de (u_n) définie par $u_{n+1} = 0.2u_n$ et $u_0 = -3$.
