DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (4 points)

Soit a et b deux réels strictement positifs avec $a < b$. Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour $n \geqslant 0$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. Déterminer u_1 et v_1.
2. Démontrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique de raison $1/3$.
3. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, qu'en déduisez vous ?
4. Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est une suite constante.
5. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2. (1.5 points)

Soit $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad v_n = u_{2n}.$$

Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 3. (1.5 points)

Nous posons :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \frac{-n}{(2n+1)(2n+2)} u_n \quad \text{et} \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

1. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Démontrer la par récurrence.

Exercice 4. (5 points)

On considère la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f(x) = 2\sqrt{x+3} \quad u_0 = -1$$

En utilisant les propriétés du cours sur les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. Justifier que la suite est bien définie.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

Exercice 5. (1.5 points)

Montrer que a est racine du polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $X - a | P$.

Exercice 6. (5.5 points)

1. Déterminer la partie entière dans la décomposition en éléments simples dans dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction suivante $R(X) = \dfrac{X^4 - 5X + 2}{(X+2)^2(X+1)}$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{X}{(X+1)^5(X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{2X+1}{(X^2+1)(X^2+3X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
4. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{5X+2}{(X+1)(X^2-2X+5)}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 7. (1 point)

Déterminer les primitives pour la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{5}{X+1} - \frac{7}{(X+1)^2} + \frac{8}{(X+1)^3} + \frac{X+3}{X^2+1}$$

.