DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (2 points)
Décomposer le polynôme suivant en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$: on remarquera que 1 est racine du polynôme dont vous calculerez la multiplicité.

$$X^5 - X^4 - 4X^2 + 7X - 3$$

Exercice 2. (6 points)

1. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{1}{(X-1)^4(X+5)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
2. Déterminer la partie entière de : $R(X) = \dfrac{X^4 + X^2 + 1}{X^3 - 4X^2 - 3X + 18}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{5X + 2}{(X^2+1)(X+3)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
4. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{X}{(X^2 - X - 6)(X-3)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
5. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{1}{(X^2+5)(X+2)}$ dans $\mathbb{C}(X)$. (On ne donnera pas la forme algébrique des coefficients).

Exercice 3. (1.5 points)

Déterminer les primitives pour la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{2}{X+2} + \frac{-1}{(X-1)^4} + \frac{X+1}{X^2+1}$$

.

Exercice 4. (3 points)

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{8k+2}{k-k^3}$$

Exercice 5. (1 point)

Déterminer la matrice inverse de $M \in M_n(K)$ qui vérifie l'équation :

$$2M^2 - 3M + 4I_n = 0$$

Exercice 6. (2.5 points)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Donner le coefficient b_{23} avec $B = (bij) = A^{-1}$

Exercice 7. (2 points)

Déterminer le déterminant de la matrice ci dessous (on justifiera l'expression obtenue). Toutes les valeurs au-dessus de la diagonale des λ_i sont nuls.

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & & & \vdots \\ \lambda_n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exercice 8. (2 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_k)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de F avec p et k des entiers à déterminer. et

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner les dimensions de E et de F.
2. Déterminer l'image de la base $\mathcal{B}$ par f.
3. Déterminer l'expression analytique de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$