Exo 1.

$N(x) = \sin(2x) - \ln(1+x) - x + \cos x - 1$

$= 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - x + \left[1 - \frac{x^2}{2}\right] + -1 \quad + o(x^3)$

$= 2x - \frac{4}{3}x^3 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 - \frac{x^2}{2} - 1 \quad + o(x^3)$

$= -5/3\, x^3 + o(x^3)$

$D(x) = \tan x - x$

$= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = 1/3\, x^3 + o(x^3)$

ainsi $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-5/3\, x^3 + o(x^3)}{1/3\, x^3 + o(x^3)}$

$= \frac{x^3\left(-5/3 + o(1)\right)}{x^3\left(1/3 + o(1)\right)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = -5$

2)

$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + \ln(x-1)}$

$x \to 2$

$t = x - 2 \iff x = t + 2$

$f(t) = \frac{e^{2(t+2)}}{1 + \ln(t+2-1)} = \frac{e^{2t+4}}{1 + \ln(t+1)}$

$$f(t) = \frac{e^4 \cdot e^{2t}}{1 + \ln(t+1)}$$

$1 + \ln(1+t) = 1 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$e^4 \cdot e^{2t} = e^4\left[1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2)\right]$

$$= e^4 \left[1 + 2t + 2t^2 + o(t^2) \right]$$

qd $t \to 0$ $\quad 1 + \ln(1+t) \to 0$

on peut

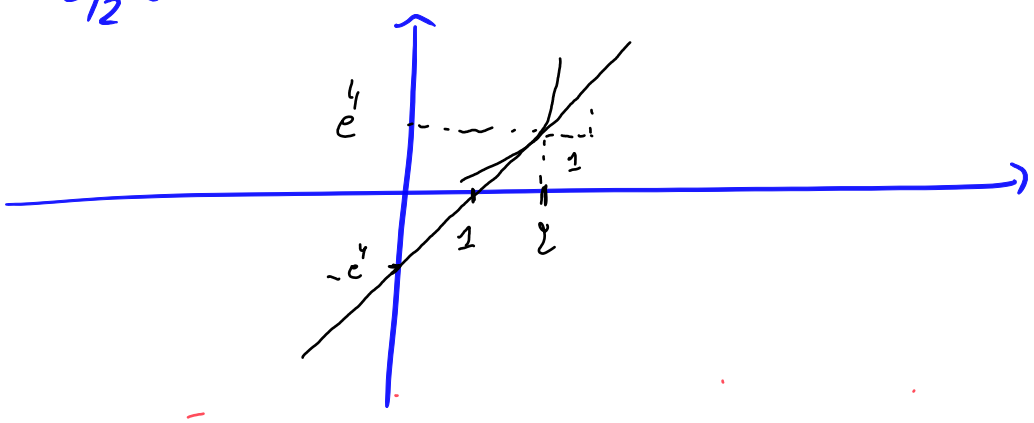
$$\begin{array}{l} e^4 + 2e^4 t + 2e^4 t^2 \\ -e^4 - e^4 t + \frac{e^4 t^2}{2} \\ \hline e^4 t + \frac{5}{2} e^4 t^2 \\ -e^4 t - e^4 t^2 \\ \hline \frac{3}{2} e^4 t^2 \end{array} \qquad \left| \begin{array}{l} 1 + t - t^2/2 \\ \hline e^4 + e^4 t + \frac{3}{2} e^4 t^2 \end{array} \right.$$

$$f(t) = e^4 + e^4 t + \frac{3}{2} e^4 t^2 + o(t^2)$$

$$\Rightarrow f(x) = e^4 + e^4 (x-2) + \frac{3}{2} e^4 (x-2)^2 + o((x-2)^2)$$

$T : y = e^4 + e^4 (x-2)$ tangente à C_f en 2

et $\frac{3}{2} e^4 (x-2)^2 > 0$ donc C_f au dessus de T



3) $f(x) = \dfrac{e^{1/x} + x^2 + 3}{x - 4}$

$t = 1/x \quad x \to +\infty \quad t \to 0$

$$f(t) = \frac{e^t + 1/t^2 + 3}{1/t - 4} = \frac{e^t + \frac{1+3t^2}{t^2}}{\frac{1-4t}{t}} = \frac{1}{t}\left(\frac{t^2 e^t + 1 + 3t^2}{1-4t}\right)$$

$e^t = 1 + \theta(1)$

$$f(t) = \frac{\left[t^2(1+\theta(1)) + 1 + 3t^2\right]}{t\left[1-4t\right]}$$

$$f(t) = \frac{\left[t^2 + o(t^2) + 1 + 3t^2\right]}{t(1-4t)}$$

$$= \frac{1 + 4t^2 + o(t^2)}{1 - 4t} \times \frac{1}{t}$$

$1 + 4t^2$ | $1 - 4t$

$-1 + 4t$ | $1 + 4t + 20t^2$

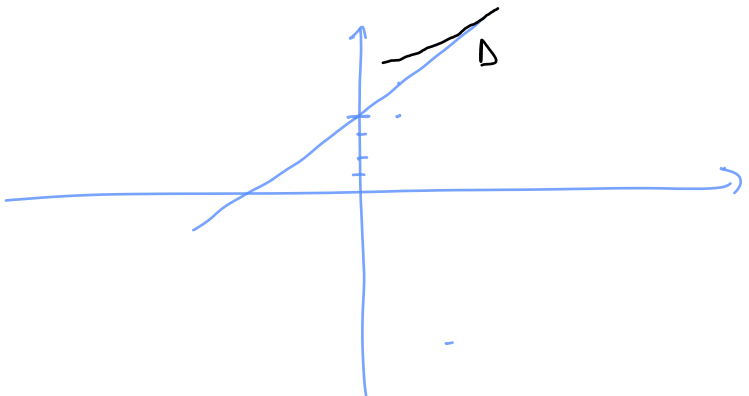
$4t + 4t^2$

$-4t^2 + 16t^2$

$20t^2$

$$f(t) = 1/t + 4 + 20t + o(t)$$

$$f(x) = x + 4 + \frac{20}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$



$\Delta : y = x + 4$

$x \to +\infty$

$\frac{20}{x} > 0$

C_f au dessus de Δ

Exo 2 :

1) $0_{\mathbb{R}^3} \in F_1$ car $0-0=0$

soient $u(x,y,z) \in F_1 \Rightarrow x-y=0$

$v(x',y',z') \in F_1 \Rightarrow x'-y'=0$

alors $\alpha u+v\ (\alpha x+x', \alpha y+y', \alpha z+z')$

or $\alpha x+x'-(\alpha y+y')$

$= \alpha(x-y)+(x'-y') = 0+0$ car $u \in F_1$ et $v \in F_1$

$\Rightarrow \alpha u+v \in F_1$

donc F_1 s.e.v de $\mathbb{R}^3$

ou : F_1 est 1 sev de $\mathbb{R}^3$ car on reconnait l'equation d'1 plan vectoriel.

$F_1 = \{(x,y,z) / x-y=0\}$

$= \{(x,x,z) \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0)+z(0,0,1), -\}$

$= \text{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$

or ces 2 vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires il s'agit donc d'1 famille libre et generatrice de F donc 1 base de F_1,

2) a) H est une droite de $\mathbb{R}^3$, H est donc un sev de $\mathbb{R}^3$

b) G est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim G = 2$
H est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim H = 1$
$\Rightarrow \dim G + \dim H = \dim E$ avec $E = \mathbb{R}^3$

- et $(1,1,-1) \notin G \Rightarrow H \not\subset G$
$\Rightarrow H \cap G = \{0_E\}$

donc G et H sont supplementaires de $\mathbb{R}$

Exo 3

1) • $F \subseteq E$

• Le polynôme nul 0_E appartient à F car $0_E = 0 + 0X + 0X^2$ ✓

• Soit $P_1 \in F \Rightarrow \exists\, a, b, c$ réels / $P_1(X) = aX^2 + bX + c$

soit $P_2 \in F \Rightarrow \exists\, a', b', c'$ réels / $P_2(X) = a'X^2 + b'X + c'$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha P_1 + P_2)(X) = \underbrace{(\alpha a + a')}_{\in \mathbb{R}} X^2 + \underbrace{(\alpha b + b')}_{\in \mathbb{R}} X + \underbrace{(\alpha c + c')}_{\in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \alpha P_1 + P_2 \in F$

F sev de E

2) $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$

$G = \text{Vect}(1, X)$

$G \subseteq F \Rightarrow F \cap G = G$ donc F et G ne sont pas supplementaires de E

$\neq \{0_E\}$

Exo 4

$\Rightarrow$ Si $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $u \in F + G \Rightarrow \exists f_1 \in F, \exists g_1 \in G /\ u = f_1 + g_1$. Supposons qu'il existe $f_2 \in F$ et $g_2 \in G /\ u = f_2 + g_2$

donc $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ (*)

$\Rightarrow f_1 - f_2 \in F$ car F est un sev

- - par (*) $f_1 - f_2 \in G$

$\Rightarrow f_1 - f_2 \in F \cap G$ or $F \cap G = \{0_E\}$ par hypothèse

donc $f_1 - f_2 = 0_E = g_2 - g_1$

$\Rightarrow f_1 = f_2$ ET $g_2 = g_1$

$\forall u \in F+G \quad \exists! f \in F \quad \exists! g \in G /$

$u = f + g$

donc la somme $F+G$ est directe.

Exo 5 :

1)

° Liberté :

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+4c=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ a+2b-4a-4b=0 \\ 3a+b-a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Cette famille de vecteurs est libre

Or elle contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\dim(\mathbb{R}^3)=3$

C'est donc 1 base de $\mathbb{R}^3$ donc

1 famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

2) on cherche a,b,c

$$(1,1,0) = a\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=1-2a \\ 3a+1-2a+a+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=-a+c \\ 1=2a+b \\ 0=3a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Les coordonnées de 8 dans (e_1,e_2,e_3) sont donc $(-1,3,0)$.

1

3) E e.v
$\dim E = 3$
(u, v, w) 3 vecteurs de E
$F = \text{Vect}(u, v, w)$

Cas 1 : (u, v, w) est 1 famille libre de 3 vecteurs ds E or $\dim E = 3 \Rightarrow$ c' est 1 base de E

$F = E$

Cas 2 : (u, v, w) coplanaires et 2 des 3 vecteurs sont non colinéaires $\Rightarrow \dim F = 2$

Cas 3 : (u, v, w) sont colinéaires et au moins un des 3 vecteurs est non nul $\Rightarrow \dim F = 1$

Cas 4 : $u = v = w = 0 \Rightarrow \dim F = 0$