Exo 1 :

1) $f(x) = \ln(x^2+1)$

$D_f = \mathbb{R}$

f dérivable sur D_f en tant que composée

et $$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

d'où

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\ln 5$	0	$\nearrow$ $\ln 2$	$\nearrow$ $+\infty$

car $\lim (x^2+1) = +\infty$
et $\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

2) $f([-2,1]) = [0, \ln 5]$

$x \in f^{-1}[-1, \ln(10)] \iff f(x) \in [-1, \ln(10)]$
$\iff f(x) \in [-1, 0[$ ou $f(x) \in [0, \ln(10)]$
$\iff$ impossible ou $0 \leq \ln(x^2+1) \leq \ln(10)$
$\iff$ ——— ou $1 \leq x^2+1 \leq 10$ en appliquant $x \mapsto e^x$
$\iff$ ——— ou $0 \leq x^2 \leq 9$
$\iff x \in [-3,3]$

$f(1) = \ln 2 = f(-1)$
donc f n'est pas injective,

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$
ainsi $f(x) = -1 \Rightarrow \ln(x^2+1) = -1$ est 1 equation n'ayant pas de solutions donc f n'est pas surjective

Par suite f non bijective

3) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc g est 1 bijection de $I = \mathbb{R}^+$ dans $g(I) = [g(0), \lim_{x \to +\infty} g(x)[= [0, +\infty[$.

$\forall y \in \mathbb{R}^+$ $y = \ln(x^2+1)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$
$\Rightarrow e^y = x^2+1$ ———
$\Rightarrow e^y - 1 = x^2$ ———
$\Rightarrow x = +\sqrt{e^y - 1}$ car $x \in \mathbb{R}^+$

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$y \longmapsto \sqrt{e^y - 1}$

Exo 2 :

$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto \sqrt{n^2+1}$

• Injectivité

Soient $n_1 \in \mathbb{N}$ $n_2 \in \mathbb{N}$ /

$f_1(n_1) = f_1(n_2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{n_1^2+1} = \sqrt{n_2^2+1}$

$\Rightarrow (\sqrt{n_1^2+1})^2 = (\sqrt{n_2^2+1})^2$

$\Rightarrow n_1^2 + 1 = n_2^2 + 1$

$\Rightarrow n_1^2 = n_2^2$

$\Rightarrow n_1 = n_2$ ou $n_1 = -n_2$

or n_1 et n_2 sont des entiers naturels

$\Rightarrow n_1 = n_2$

f_1 est donc injective

• Surjectivité

$-1 \in \mathbb{R}$

et $\nexists n \in \mathbb{N}$ / $\sqrt{n^2+1} = -1$

-1 n'est pas atteint

donc f_1 n'est pas surjective

$f_2 \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x-y, x-y)$

Injectivité

$f_2(1,1) = f_2(0,0) = (0,0)$

Ainsi, $(0,0)$ admet plusieurs antécédents donc

f_2 n'est pas injective

Surjectivité

$(0,1) \in \mathbb{R}^2$

et $(0,1)$ n'admet pas d'antécédant par f_2

en effet le système

$\begin{cases} x-y = 0 \\ x-y = 1 \end{cases}$ n'admet pas de solutions

donc f_2 n'est pas surjective

Exo 4 :

$A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

1) AB et BA sont donc calculables

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2) $\det A = 1\times 2 - 1\times 3 = -1$

$\det A \neq 0$

A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $$(S)\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A étant inversible

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exo 3

1. $y = \arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\Leftrightarrow y \in [0, \pi] \;/\; \cos y = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $y = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow y = \frac{5\pi}{12}$

2. $y = \arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$\Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\;/\; \tan y = \tan\frac{5\pi}{4}$

$\Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\;/\; y = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$

3. $y = \cos(\arccos(-1/2))$

$\Leftrightarrow y = -1/2$ car $\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x$

2. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \in [-1,1]\right\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- $x \longmapsto \arcsin x$ n'est pas dérivable ni en 1 ni en -1
or $1/x = 1 \Leftrightarrow x = 1$ et $1/x = -1 \Leftrightarrow x = -1$
donc f dérivable sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$

et $f'(x) = \frac{-1/x^2}{\sqrt{1-(1/x)^2}}$

Exo 5

1)

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = +\infty$

donc h n'est pas négligeable devant g en 0^+

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 0$

donc h est négligeable devant g en $+\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\sin x}{x^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\sin x}{x}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{\sin(X^2)}{X}\right) = 0$

en posant $X = \sqrt{x}$

car c'est le taux d'accroissement de la fonction $f : X \longmapsto \sin(X^2)$ en $a = 0$ i.e. $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{f(X) - f(0)}{X}$

et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 2X\cos(X^2)$

donc f n'est pas négligeable dvt g

mais f est négligeable dvt h en 0.

Exo 6 :

3) $f(x) = \ln^2\left(1+\frac{x}{2}\right) = \left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)^2$

or $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)^2$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{e^{2x}} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)}{1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)}$

or $\lim_{x\to 0}(e^{2x}) \neq 0$ donc nous pouvons utiliser une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 & 1 + 2x + 2x^2 \\ \hline -1 \quad -2x \quad -2x^2 & 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 \\ \hline -\frac{3}{2}x - \frac{17}{8}x^2 & \\ +\frac{3}{2}x + 3x^2 & \\ \hline \frac{7}{8}x^2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exo 6 :

5) $f(x) = e^{1+x^2}$

$= e \cdot e^{x^2}$

or $x^2 \longrightarrow 0$

qd $x \to 0$

$$f(x) = e \cdot \left[1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + o(x^4)\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = e\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

Exo 6 :

1) $f(x) = \cos(\sqrt{x}) - x$

au $x \to 0$ $\sqrt{x} \to 0$

$$f(x) = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} + o(x^2) - x$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - x + o(x^2)$$

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-2x} = \dfrac{x - x^3/6 + o(x^3)}{1-2x}$

or $\lim_{x \to 0} (1-2x) \neq 0$ nous pouvons donc utiliser une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) & 1-2x \\ \hline -x + 2x^2 & x + 2x^2 + \frac{23}{6}x^3 \\ \hline 2x^2 - \frac{x^3}{6} & \\ -2x^2 + 4x^3 & \\ \hline \frac{23}{6}x^3 & \end{array}$$

ainsi $f(x) = x + 2x^2 + \frac{23}{6}x^3 + o(x^3)$