DS1 M.1.1 2019

Exercice 1 : /2

$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = |a|^2+|b|^2+2ab.$

et $ab \leq |ab| = |a||b|$

donc $|a+b|^2 \leq |a|^2+|b|^2+2|a||b| = (|a|+|b|)^2$

$|a+b| \leq |a|+|b|$ par croissance de la fonction racine carrée

Exercice 2 : /4

$\lim\limits_{R\to 5} \dfrac{R+a}{R^2-6R+b} = (1)$

$\lim\limits_{R\to 5} R+a = a+5$

$\lim\limits_{R\to 5} R^2-6R+b = b-5$

- cas 1 : Si $b-5 \neq 0$ donc $b \neq 5$ $\quad (1) = \dfrac{a+5}{b-5}$

- cas 2 : Si $b = 5$. $\quad R^2-6R+5 = (R-5)(R-1)$

R		1		5	
R^2-6R+5	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{R\to 5^-} R^2-6R+5 = 0^-$ $\quad \lim\limits_{R\to 5^+} R^2-6R+5 = 0^+$

si $a+5<0$ $\lim\limits_{R\to 5^-} f(R) = +\infty$ et $\lim\limits_{R\to 5^+} f(R) = +\infty$

si $a+5>0$ $\lim_{R\to 5^-} f(R) = -\infty$ et $\lim_{R\to 5^+} f(R) = -\infty$

si $a+5=0$ $a=-5$

et $f(R) = \frac{R-5}{(R-5)(R-1)} = \frac{1}{R-1}$

$$\textcircled{a} = \frac{1}{4}$$

2] $\frac{\sqrt{2x+20}-4}{x+2} = \frac{2x+20-16}{(x+2)(\sqrt{2x+20}+4)} = \frac{2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{2x+20}+4)}$

$= \frac{2}{\sqrt{2x+20}+4}$ ou avec la règle de l'Hospital

$\lim_{x\to -2} \textcircled{2} = \frac{1}{4}$

Exercice 3 : /4,5

1] $|2x+3| \geq 1$

. si $2x+3 \geq 0$ $2x+3 \geqslant 1$ $x \geqslant -1$

ou

si $2x+3 < 0$ $-(2x+3) \geqslant 1$ $x \leqslant -2$

$S =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$

2] $\frac{|xy|}{|x|+2|y|+1} \leqslant -1$ ou $\frac{|xy|}{|x|+2|y|+1} \geqslant 0$ comme quotient de nbs positifs

donc pas de solution.

Exercice 4 : /3

1) $f(x) = e^{\sin(\sqrt{x})}$ pour $x \in [0; +\infty[$

f est continue sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues sur $[0; +\infty[$, et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, e^{\sin(\sqrt{x})}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

$\frac{1}{2\sqrt{x}} \to +\infty$; $\cos(\sqrt{x}) \to 1$; $e^{\sin(\sqrt{x})} \to 1$

ou bien : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{x}$

règle de l'hôpital

ou bien : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{\sin\sqrt{x}} \times \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

donc f n'est

et $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$ donc f pas dérivable en 0.

2) f n'est pas dérivable en 0, donc n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5 : /2

$f(x) = \frac{(1+2x)\ln(1+2x)}{x}$ ou Hospital

en posant $u = 2x$

$f(x) = g(u) = 2\frac{(1+u)\ln(1+u)}{u}$

et $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

Exercice 6 : /2

$$x = 2\,r(t)\cos\theta(t) = x(t)$$

$$dx = x'(t)\,dt = 2\left(r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\,\theta'(t)\sin\theta(t)\right)dt$$

ou $dx_a(t) = 2\left(r'(a)\cos\theta(a) - r(a)\,\theta'(a)\sin\theta(a)\right)t$

Exercice 7 : /4,5

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} \qquad R = 50\,\Omega$$

1) $\Delta I = \underbrace{I(101) - I(100)}_{} = \sqrt{\frac{101}{50}} - \sqrt{\frac{100}{50}}$

$$I'(P) = \frac{1}{2\sqrt{PR}}$$

2) $\Delta I \simeq dI_{100}(1) = I'(100) \times 1$

$$= \frac{1}{2\sqrt{100 \times 50}}$$

Exercice 8 : /2

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) $\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists\, x < \alpha \;/\; f(x) < \varepsilon.$