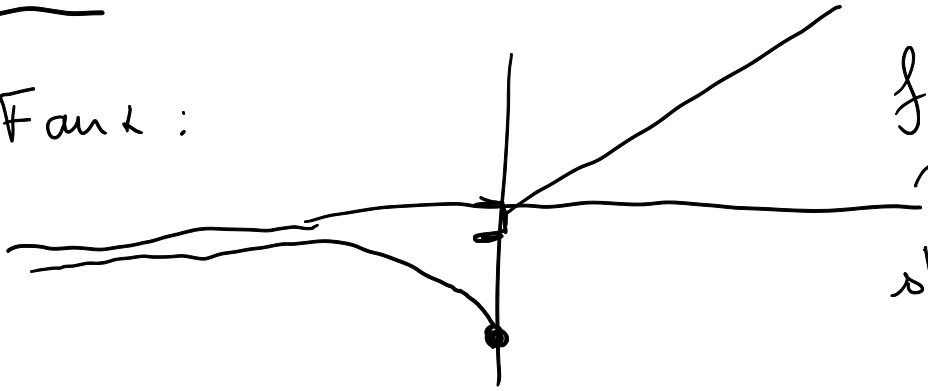
## Exo 1

1) Faux :



$f$ est injective mais pas strictement monotone.

2) Faux : exp est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante, mais n'est pas surjective car tout réel négatif n'a pas d'antécédent.

## Exo 2

1) $f(n) = 2n+1$, $f$ est strict. $\nearrow$, donc $f$ est injective

2) $f$ n'est pas surjective car 4 n'a pas d'antécédent :
$4 = 2n+1 \iff n = \frac{3}{2}$ mais $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

3) $f$ n'est pas surjective, donc pas bijective.

4) • Soit $I$ l'ensemble des nombres impairs

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n+1$ est un entier impair $\Rightarrow f(\mathbb{N}) \subset I$

• Soit $p$ un entier impair, alors $p$ peut s'écrire sous la forme $2n+1 \Rightarrow I \subset f(\mathbb{N})$.

donc $f(\mathbb{N}) = I$

- $f^{-1}([2,8]) = f^{-1}(\{3;5;7\})$ d'après la question précédente.
$= f^{-1}(\{3\}) \cup f^{-1}(\{5\}) \cup f^{-1}(\{7\})$
$= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1;2;3\}$

## Exo 3

- Comme, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ alors $f$ est strict. ↗.
- on démontre que si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$, donc que $f$ est injective.

On a donc démontré que si $f$ est strict. ↗ alors $f$ est injective.

## Exo 4

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Résolvons $f(x,y) = (X,Y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = X \\ x + 2y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2X + Y \\ -7y = X - 3Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2X+Y}{7} \\ y = \dfrac{X-3Y}{-7} \end{cases}$$

Chaque couple $(X,Y)$, a un unique antécédent, donc $f$ est une bijection de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f^{-1}(X,Y) = \left(\dfrac{2X+Y}{7}; \dfrac{X+3Y}{7}\right)$

## Exo 5

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

- $f$ est surjective car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x,1)$ est un antécédent.
- $f$ n'est pas injective car $(x,1)$ et $(x,2)$ sont deux antécédents de $x$.

Exo 6

1) . Sin est définie sur $\mathbb{R}$, et $\sin(\mathbb{R}) = [-1;1]$.

. Argth est définie sur $]-1,1[$, donc on doit enlever

$x$ tq $\sin x = 1$ et $\sin x = -1$ ,

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

2) a) $\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x \times 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} \times \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}}$$

$$= -\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} \times x^2+1} \times \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{-1}{x^2+1}$$

b) donc $f(x) = -\arctan x + C$

$f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = -\arctan 0 + C$

$\Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$ . $\Rightarrow f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$

3) Argsh est définie sur $\mathbb{R}$ et ch est définie sur $\mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$.

$ch^2 X - sh^2 X = 1 \Rightarrow ch^2 X = 1 + sh^2 X$

on pose $X = \text{argsh}\, x$ et on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh(\text{argsh}\, x) = x$

$\rightarrow ch^2(X) = 1 + x^2 \Rightarrow ch(X) = \mp\sqrt{1+x^2}$

or $ch\, X \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow ch(X) = \sqrt{1+x^2}$

## Exercice 7

$$\begin{cases} ax+y=b \\ ax+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} = 2a - a = a$

Si $a \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -a & a \end{pmatrix}$

$$\text{et donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 2b-2 \\ -ab+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(b-1)}{a} \\ -b+2 \end{pmatrix}$$

Si $a=0$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=b \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=b \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Si } b=1 \quad S=\{(x,1),\ x\in\mathbb{R}\}$$

Si $b \neq 1$ $\quad S=\phi$

## Exo 8

1) $\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \theta(x^3)$

$$= \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{81} + \theta(x^3)$$

2) $\sin x\, e^{2x} = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6}\right) + \theta(x^3)$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}\right) + \theta(x^3)$$

$$= x + 2x^2 + 2x^3 - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)$$

$$= x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \theta(x^3)$$

3) $\begin{array}{r|l} 3+2x & 1+3x \\ -9x & \hline -7x+21x^2 & \end{array}$

$\Rightarrow \dfrac{3+2x}{1+2x} = 3-7x+21x^2+\theta(x^2)$

4) $\dfrac{\cos x-1}{e^x-1} = \dfrac{1-\frac{x^2}{2}+\theta(x^3)-1}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\theta(x^3)} = \dfrac{-\frac{x}{2}+\theta(x^2)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\theta(x^2)}$

$\begin{array}{r|l} -\frac{x}{2} & 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6} \\ \frac{x^2}{4} & \hline -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4} & \end{array}$ $\Rightarrow \dfrac{\cos x-1}{e^x-1} = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\theta(x^2)$

Exos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ a & 2 & 9 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3a+15 \\ 2a+8a+27 \\ 2+3a+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19+3a \\ 10a+27 \\ 2+6a \end{pmatrix}$$

$19+3a=13 \Rightarrow a=-2$ | $2+6(-2)=-10$

$10(-2)+27=7$

Réponse : oui avec $a=-2$.