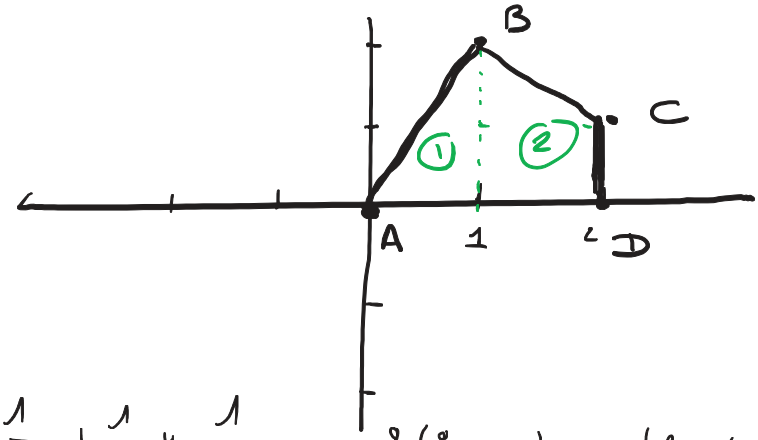
Exo I

1)



2) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2x+1} = \frac{2(2x+1)x - (2x+1)+1}{4(2x+1)}$

$= \frac{4x^2 + 2x - 2x - 1 + 1}{4(2x+1)} = \frac{x^2}{2x+1}$

3)

Décrivons ABCD avec 2 domaines :

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2x\}$ car $(AB): y = 2x$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \le x \le 2, \ 0 \le y \le -x+3\}$ car $(BC): y = \frac{1-2}{2-1}x + c$, $y = -x+3$

$$\iint_D f \, dS = \iint_{D_1} f \, dS + \iint_{D_2} f \, dS$$

$$\iint_D f \, dS = \int_0^1 \int_0^{2x} \frac{x}{y+1} \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{-x+3} \frac{x}{y+1} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\ln|y+1|\right]_0^{2x} dx + \int_1^2 x \left[\ln|y+1|\right]_0^{-x+3} dx$$

$$= \int_0^1 x \ln(2x+1) \, dx + \int_1^2 x \ln(-x+4) \, dx$$

$$\overset{IPP}{=} \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1} \, dx + \left[\frac{x^2}{2}\ln(-x+4)\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{-x+4} \, dx$$

(*)

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(2x+1)\right]_0^1 + 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2}{2} - 4x - 16\ln(-x+4)\right]_1^2$$

(*) car :

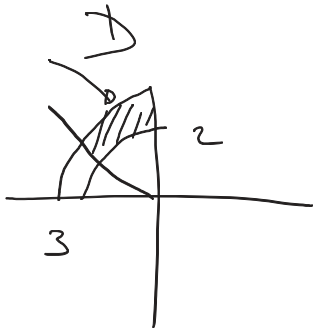
$$\frac{x^2-16+16}{-x+4} = -(x+4) + \frac{16}{-x+4}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{8}\ln 3 + 2\ln 2 - 1 - 4 - 8\ln 2 + \frac{1}{4} + 2 + 2\ln 3 = -\frac{11}{4} + \frac{63}{8}\ln 3 - 6\ln 2$$

($-\frac{1}{2}\ln 3$)

Exo II :

1) $D = \{(r,\theta) / \ r \in [2,3], \theta \in [\pi/2, \frac{3\pi}{4}]\}$



$$I = \iint_D f \, dS = \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} \left(\int_{r=2}^{3} r^2 \, r \, dr \right) d\theta$$

ainsi $f(r,\theta) = r^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2 + y^2$

2) $$I = \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=2}^{r=3} d\theta = \left(\frac{81}{4} - \frac{16}{4}\right) \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} d\theta = \frac{65}{4}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{65}{4} \times \frac{\pi}{4}}$$

Exo III :

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < a \leq xy \leq b ; \ x \leq y^2 - x^2 \leq 1\}$

$u = xy \quad v = y^2 - x^2$

$D \Leftrightarrow \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ a \leq u \leq b ; \ 0 \leq v \leq 1\}$

$$J(x;y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = |2(y^2+x^2)| = 2(x^2+y^2)$$

$$\iint_D f \cdot dS = \iint_D (y^2-x^2) \frac{1}{2} \underbrace{J(x;y) \, dx \, dy}_{= du \, dv} = \iint_0 \frac{1}{2} v^0 \, du \, dv$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{1}{2} v^0 \, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{1}{v+1} v^{v+1} \right]_0^1 du = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{v+1} \, du$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|u+1|\Big]_a^b = \frac{1}{2}\big(\ln(b+1) - \ln(a+1)\big)$$

Exo IV : $f(x) = x\ln x$, $x > 0$

1) f dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$ $f'(x) = \ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$

x	0		$\frac{1}{2e}$		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'	‖		$-$	$\|$	0	$+$			
f	‖	0	$\searrow$		$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$			$+\infty$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

$f([\frac{1}{2e}, 1]) = \{ f(x), x \in [\frac{1}{2e}, 1]\}$

$= [-\frac{1}{e}, 0]$ car $f(\frac{1}{2e}) < 0$ et d'après tableau de variations.

2) $x \in f^{-1}(]-\infty, 0]) \iff f(x) \leq 0$

$\iff x \in]0, 1]$

$f^{-1}(]-\infty, 0]) =]0, 1]$

D'après tableau de variations

Exo V :

$y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B / \ y = f(x)$

$\Rightarrow \exists (x \in A \text{ ou } x \in B) / \ y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in A / y = f(x)$ ou $\exists x \in B / y = f(x)$

$\Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

d'où $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Exo VII :

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-4y=b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ 5y=a-b \end{cases} \quad (L_1)-(L_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - \frac{a-b}{5} = \frac{4a+b}{5} \\ y = \frac{a-b}{5} \end{cases}$

tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ a un unique antécédant dans $\mathbb{R}^2$

donc f est bijective et $f^{-1}(a,b) = \left(\frac{4a+b}{5}, \frac{a-b}{5}\right) \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

2) **Injection**

g n'est pas injective :
en effet
$g(1,2) = 1e^2 = e^2$
$g(e,1) = ee^1 = e^2$
or $(1,2) \neq (e,1)$.

Surjection

g est surjective car
$\forall a \in \mathbb{R}$,
comme $g(a,0) = a$
a admet au moins un antécédent par g

Bijection

g n'est pas bijective car n'est pas injective

3) **Injection**

h est injective car
$\forall x_1 \in \mathbb{R}$ /
$\forall x_2 \in \mathbb{R}$
$h(x_1) = h(x_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1+1 = 2x_2+2 \\ 4x_1+2 = 4x_2+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \{x_1 = x_2$

Surjection

h n'est pas surjective ainsi $(1,3)$ n'admet pas d'antécédent par h :

$h(x) = (1,3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=1 \\ 4x+2=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1/4 \end{cases}$ impossible

Bijection

h n'est pas bijective car elle n'est pas surjective

Exo VII : $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x+2}$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$
$= \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2\}}$ $\Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$

$E = D_f$
f est continue et strictement croissante sur $]-\infty ; -2[$ donc par thm du cours f réalise 1 bijection de $]-\infty ; -2[$ sur $]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{-2} f[=]1 ; +\infty[$
De même f réalise une bijection de $]-2 ; +\infty[$ sur $]-\infty ; 1[$
Conclusion : f réalise 1 bijection de E sur $\underbrace{]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[}_{F}$

3) Soit $y \in F$
$y = f(x) \iff \frac{x+1}{x+2} = y$
$\iff x+1 = xy + 2y$
$\iff x(1-y) = 2y-1$
$\iff x = \frac{2y-1}{1-y} = \frac{1-2y}{y-1}$, on est sûr que $x \in E$ car f est bijective.
car $y \in F$ donc $1-y \neq 0$

ainsi $f^{-1} : F \longrightarrow E$
$y \longmapsto \frac{1-2y}{y-1}$